Universidade de Aveiro Departamento de Matemática
2007

Cátia Sofia Nunes Rodrigues

Estabilidade e Regularidade de Matrizes de Toeplitz

Universidade de Aveiro Departamento de Matemática
2007

Cátia Sofia Nunes Rodrigues

Estabilidade e Regularidade de Matrizes de Toeplitz

Dissertação apresentada à Universidade de Aveiro para cumprimento dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre em Matemática, realizada sob a orientação científica do Professor Doutor Luís Filipe Pinheiro de Castro, Professor Associado com Agregação do Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro.

Aos meus pais e à minha irmã.

o júri

presidente

Prof. Dr. Helmuth Robert Malonek
professor catedrático da Universidade de Aveiro

Prof. Dr. Gueorgui Vitalievitch Smirnov
professor associado com agregação da Faculdade de Ciências da Universidade do Porto

Prof. Dr. Luís Filipe Pinheiro de Castro
professor associado com agregação da Universidade de Aveiro

agradecimentos

Ao Professor Doutor Luís Filipe Pinheiro de Castro por ter aceitado orientar esta dissertação, pelo acompanhamento científico, e inquestionável disponibilidade e interesse com que acompanhou a realização deste trabalho.

Aos meus pais e à minha irmã pela compreensão e paciência.

Às minhas amigas de todas as horas, Rute e Helena, pelo apoio e encorajamento.

palavras-chave

Matrizes de Toeplitz, Matrizes de Hankel, Operadores de Toeplitz, Álgebra de Wiener, Propriedade de Fredholm, Estabilidade, Convergência.

resumo

A presente dissertação teve por embrião o problema clássico inerente às possíveis soluções de sistemas de equações lineares, designadamente enquanto escrito na correspondente formulação matricial. A resolução de sistemas de equações lineares infinitos da forma $Ax = y$, onde A é uma matriz infinita, envolve por exemplo questões delicadas de convergência e de estabilidade, dependendo do tipo de matriz associada a A . Tal é o caso quando se aplica o designado *método da secção finita* para a descoberta de propriedades inerentes ao original sistema infinito via consideração de uma sucessão de sistemas finitos. Na presente dissertação tais questões são abordadas especialmente para matrizes do tipo de Toeplitz e de Hankel. De uma forma mais global, estas matrizes são também consideradas na presente dissertação enquanto operadores lineares actuando entre determinados espaços de Banach. Sob esta abordagem da Teoria de Operadores, especial relevo é dado para a situação dos designados operadores de Toeplitz com símbolos na álgebra de Wiener. São descritas teorias de factorização para várias classes de símbolos que levam a consequentes factorizações de operadores – na sua maioria aplicadas a operadores do tipo de Toeplitz. Adicionalmente, propriedades espectrais e de Fredholm são também abordadas para os operadores/matrizes de Toeplitz.

keywords

Toeplitz Matrices, Hankel Matrices, Toeplitz Operators, Wiener Algebra, Fredholm property, Stability, Convergence.

abstract

The current dissertation had as origin the classical problem inherent to the possible solution of linear equation's systems, namely while written in the correspondent matrice's formulation. The resolution of infinite systems of linear equations like $Ax = y$, where A is an infinite matrix, involves for instance delicate questions of convergence and stability, depending on the kind of matrix associated to A . This is the case of the finite section's method, which is used to find the inherent properties of the original infinite system regarding the sequences of finite systems. In the current essay such questions are especially formulated for Toeplitz and Hankel matrices. In a more general way, these matrices are also considered in this essay while linear operators acting between some of Banach spaces. Under this Operator Theory approach, special attention is given to the Toeplitz operators which use symbols in the Wiener algebra. Factorization theories are described for several classes of symbols which lead to the operators factorizations – in its majority applied to Toeplitz like operators. Additionally, spectral and Fredholm properties are also described for the Toeplitz operators or matrices.

Conteúdo

Capítulo 1

Introdução

A presente dissertação tem como objectivo perspectivar um problema que embora parecendo simples, de facto não o é: solução de equações lineares.

Perante uma equação, ou sistema de equações, surgem sempre duas questões naturais: a existência e a unicidade da solução. A título ilustrativo, note-se que o sistema,

$$\begin{cases} 2x+3y-5z &= a \\ x-2y+z &= b \\ 3x+y-4z &= c \end{cases}$$

não tem solução, a menos que $a+b=c$, porque o primeiro membro da terceira equação é igual à soma dos dois primeiros membros das duas primeiras equações. Assim, qualquer solução das primeiras equações é também solução da terceira equação, devido a $a+b=c$. Concluímos então com este exemplo que quando uma equação, ou sistema de equações, tem solução essa nem sempre é única. Neste caso, se $(x,\, y,\, z)$ é solução, então $(x+t,\, y+t,\, z+t)$, para todo o t, é também solução.

Para estudar a existência e unicidade de soluções de uma equação, ou sistema de equações, vamos considerar o seguinte sistema:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+...+a_{1n}x_n &= y_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+...+a_{2n}x_n &= y_2 \\ \vdots & \vdots \quad \vdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+...+a_{nn}x_n &= y_n \end{cases}, \text{ para qualquer } n. \tag{1.1}$$

O sistema anterior pode ser representado na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}, \tag{1.2}$$

ou na forma abreviada $A\,x = y$.

A resolução do sistema (1.1) passa pela obtenção dos x_i em termos dos y_j, em (1.2).

Como é que a solução de uma simples equação, ou sistema de equações, do tipo $A\,x = y$ pode ser um problema tão complicado, se todos nós aprendemos no ensino secundário (indirectamente), que para resolver uma equação deste tipo basta inverter A e efectuar a respectiva composição com y? No entanto, este problema revela-se um pouco mais complexo que isto, dependendo da estrutura de A. Na equação $A\,x = y$, A pode ser representado sob a forma de matriz, e esta poderá ser de diferentes tipos. No presente trabalho estamos interessados em estudar, neste âmbito, matrizes de Toeplitz e matrizes de Hankel. Adicionalmente, sempre que possível abordaremos igualmente tais formulações em termos de operadores (de uma forma global).

Conforme referido, no decurso deste trabalho iremos estudar ambas as indicadas matrizes, mas em particular as matrizes de Toeplitz, que serão o propósito máximo deste trabalho, assim como algumas das suas propriedades.

Segundo Peller, em [19], a teoria dos operadores de Hankel é uma área muito bonita e muito importante em inúmeras aplicações da Análise Matemática.

O estudo das matrizes de Hankel teve início em 1861 com Hankel, mas foram Nehari (1957) e Hartman (1958) que mostraram que os operadores de Hankel são uma ferramenta muito importante na teoria de funções na circunferência unitária: Γ_0, [19].

No Capítulo 2 caracterizaremos operadores de Toeplitz limitados com símbolos na álgebra de Wiener - W - álgebra de Banach de todas as funções definidas na circunferência unitária com coeficientes de Fourier que verificam $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n| < \infty$.

Em 1970, os operadores de Hankel foram considerados uma parte proeminente da Teoria de Operadores, pelo contributo dado à análise dos seus "primos" - os operadores de Toeplitz, [20].

A proximidade entre estes operadores fica bem identificada pela identidade,

$$T(a\,b) = T(a)\,T(b) - H(a)\,H(\widetilde{b}),$$

para todo o $a,\, b \in W$.

Os operadores de Hankel juntamente com os operadores de Toeplitz constituem um caso especial de operadores - o operador multiplicação, $M(a)$. No caso de a ser uma função contínua podemos afirmar que o operador multiplicação é o operador de Toeplitz mais um operador compacto, pois como ficará provado neste capítulo o operador de Hankel é um operador compacto, ao contrário do operador de Toeplitz que nunca é um operador compacto, a menos que $a = 0$, [20] . Existem importantes relações entre estas duas classes de operadores, como iremos ver no decorrer deste capítulo.

Os operadores de Toeplitz e de Hankel podem ser definidos de várias formas. Começaremos por apresentar a forma matricial, mas, para ambos, apresentaremos também mais uma forma, que faz uso do operador projecção. Contudo, o operador de Hankel pode ainda ser caracterizado pelo uso de um operador de deslocamento. Esta última forma será também apresentada neste trabalho.

No capítulo 3 apresentaremos a noção de índice topológico: número de voltas em torno da origem no sentido contrário ao dos ponteiros do relógio, por uma curva fechada que não passa pela origem do plano complexo, para depois estabelecermos o resultado que define as condições em que uma matriz admite uma factorização de Wiener-Hopf. O método da factorização de Wiener-Hopf foi introduzido em 1931 por N. Wiener e E. Hopf [9]. A factorização em álgebras de Banach será também estudada neste capítulo.

No capítulo 4 teremos como propósito estudar uma das questões mais importantes da teoria dos operadores de Toeplitz: o espectro e em que condições o operador de Toeplitz é invertível. Desta forma, este capítulo será iniciado com a definição de operador de Fredholm, para de seguida apresentarmos, entre outros, os resultados que definem o índice do operador de Toeplitz, enquanto operador de Fredholm, de símbolo contínuo e não nulo, e o espectro do operador de Toeplitz como a união de $a(\Gamma_0)$ e de pontos de $\mathbb{C} \setminus a(\Gamma_0)$ que têm índice topológico não nulo, [2].

A estabilidade e a convergência de sucessões de operadores será estudada no Capítulo 5.

No Capítulo 6 apresentaremos o Teorema de Baxter - Gohberg - Feldman e concluiremos o presente trabalho com uma breve referência ao método da secção finita. Este método foi iniciado nos anos sessenta por Baxter e Reich [14] e nesta última parte do trabalho aparece como uma consequência natural do referido Teorema de Baxter - Gohberg - Feldman.

Por fim, gostaríamos de referir que a presente dissertação se baseou centralmente nas obras [4], [5], [7], [9], [10], [11], [12], [16] e [18].

Capítulo 2

Conceitos básicos sobre Matrizes de Toeplitz e de Hankel

Ao longo deste capítulo pretendemos estabelecer algumas notações, definições e propriedades das matrizes de Toeplitz e de Hankel (e respectivos operadores).

2.1 Definições e Resultados Auxiliares

Definição 2.1 *Seja X um conjunto não vazio e $\mathbb{K}$ um corpo. Consideremos definidas as seguintes operações:*

$$\begin{array}{rlll} + : & X \times X & \longrightarrow & X \\ & (u,v) & \longmapsto & u+v \end{array} \qquad \begin{array}{rll} \cdot : \mathbb{K} \times X & \longrightarrow & X \\ (\alpha, u) & \longmapsto & \alpha u \end{array}$$

ditas adição e multiplicação escalar. Dizemos que o terno $(X, +, \cdot)$ é um ***espaço linear*** *(ou um espaço vectorial) sobre $\mathbb{K}$ se as operações anteriores satisfazem as seguintes propriedades:*

1. $x + y = y + x$ *para todo o* $x, y \in X$;
2. $x + (y + z) = (x + y) + z$ *para todo o* $x, y, z \in X$;
3. $\exists\, 0 \in X : x + 0 = 0 + x$ *para todo o* $x \in X$;
4. $x + (-x) = 0$ *para todo o* $x \in X$;
5. $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$ *para todo o* $x \in X$, *para todo o* $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$;

6. $\exists\, 1 \in X : 1\, x = x$ *para todo o* $x \in X$;

7. $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$ *para todo o* $x, y \in X$, *para todo o* $\alpha \in \mathbb{K}$;

8. $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$ *para todo o* $x \in X$, *para todo o* $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$.

Aos elementos de X *chamamos vectores e aos elementos de* $\mathbb{K}$ *chamamos escalares.*

Definição 2.2 *Seja* X *um espaço linear. Uma* ***norma*** *em* X, $\|.\|$, *é uma função real em* X *que satisfaz as seguintes propriedades:*

Para todo x, $y \in X$, *e para qualquer escalar* $\alpha \in \mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$),

1. $\|x\| \geq 0$;

2. $\|x\| = 0 \iff x = 0$;

3. $\|\alpha x\| = |\alpha|\, \|x\|$;

4. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (*Desigualdade Triangular*).

Chamamos ***espaço normado*** *(ou espaço linear normado) a um espaço linear* X *munido da norma* $\|.\|$.

Definição 2.3 *Seja* $n \in \mathbb{N}$. *Dizemos que uma* ***sucessão*** $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, *num espaço normado* X, *é* ***convergente*** *se existe um* $x \in X$ *tal que:*

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0.$$

Definição 2.4 *Dizemos que uma* ***sucessão*** $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, *para* $n \in \mathbb{N}$, *é* ***de Cauchy*** *se:*

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N = N(\epsilon) \in \mathbb{N} : \; \|x_n - x_m\| < \epsilon, \text{ para todo o } m, n > N.$$

Definição 2.5 *Dizemos que um espaço* X *é um* ***espaço completo*** *(ou de Cauchy) se cada sucessão de Cauchy converge em* X, *isto é, tem limite em* X.

Definição 2.6 *Um* ***espaço de Banach*** *é um espaço normado completo.*

Definição 2.7 *Chamamos* ***álgebra de Banach*** *a um espaço de Banach complexo,* $\mathcal{A}$, *onde está definida uma multiplicação que goza das seguintes propriedades:*

Para todo o $x, y, z \in \mathcal{A}$ *e* $\alpha \in \mathbb{C}$,

1. $(xy)z = x(yz)$;

2. $x(y+z) = xy + xz, \quad (y+z)x = yx + zx;$

3. $\alpha(xy) = (\alpha x)y = x(\alpha y);$

4. $\|xy\| \leq \|x\|\,\|y\|.$

No caso da álgebra de Banach gozar da propriedade comutativa, $xy = yx$ para todo o $x, y \in \mathcal{A}$, dizemos que $\mathcal{A}$ é uma álgebra de Banach comutativa.

Se a álgebra de Banach possui elemento identidade, que se representa por e, 1, ou I, então tem-se:

$$\|e\| = \|1\| = \|I\| = 1.$$

Vamos denotar o elemento identidade da álgebra de Banach por e.

Definição 2.8 *Seja X um espaço normado e $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$. A expressão $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ diz-se uma **série** em X.*

Definição 2.9 *Seja X um espaço normado. Dizemos que a série é **convergente** se existir $x \in X$ tal que $\|x - \sum_{n=1}^{N} x_n\| \to 0$, quando $n \to \infty$, onde $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$ designa a soma da série.*

Definição 2.10 *Seja X um espaço normado. Dizemos que a série $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ é **absolutamente convergente** em X se $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|$ for convergente em $\mathbb{R}$.*

Definição 2.11 *Designamos por **série trigonométrica** a série da forma,*

$$a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt)). \tag{2.1}$$

Dizemos que uma função a tem período p se $a(t+p) = a(t)$, para todo o $t \in \mathbb{R}$. No caso particular do período ser 2π, chamamos série de Fourier à série trigonométrica da forma (2.1) em que os coeficientes a_k e b_k são dados por:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} a(t)\, dt \\ a_k &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} a(t) \cos(kt)\, dt, \quad k = 1, 2, ... \\ b_k &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} a(t) \sin(kt)\, dt, \quad k = 1, 2, ... \end{aligned}$$

A estes coeficientes damos o nome de coeficientes de Fourier de a.

Definição 2.12 *Seja W o espaço de todas as funções de valores complexos que estão definidas na circunferência unitária, $\Gamma_0 = \{t \in \mathbb{C} : |t| = 1\}$. Ao conjunto de todas as funções*

$$a : \Gamma_0 \longrightarrow \mathbb{C}$$

com séries de Fourier absolutamente convergentes, isto é, ao conjunto de todas as funções $a : \Gamma_0 \longrightarrow \mathbb{C}$ que podem ser representadas na forma:

$$a(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n t^n \qquad (t = e^{i\theta} \in \Gamma_0), \tag{2.2}$$

onde $a_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} a(e^{i\theta})e^{-in\theta}\,d\,\theta$ são os coeficientes de Fourier de a, e com

$$\|a\|_W = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n| < \infty$$

*chamamos **Álgebra de Wiener**, e representamos por $W := W(\Gamma_0)$.*

Observação 2.1 *Por vezes será útil identificarmos a função $a : \Gamma_0 \longrightarrow \mathbb{C}$ com a função $\theta \mapsto a(e^{i\theta})$. Nestas condições a expressão (2.2) assume a forma*

$$a(e^{i\theta}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{in\theta} \qquad (e^{i\theta} \in \Gamma_0)$$

com

$$\|a\|_W = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n| < \infty.$$

Exemplo 2.1 *A álgebra de Wiener, W, é uma Álgebra de Banach.*

1. *Comecemos por mostrar que W é um espaço normado completo, ou seja, que cada sucessão de Cauchy converge em X.*

   Para tal dada uma sucessão de Cauchy $\{a_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ com $a_n \in W$, para todo n, vamos construir um elemento b (que será o limite da sucessão de Cauchy $\{a_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$), de seguida vamos mostrar que $b \in W$ e finalmente que a sucessão $\{a_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ converge para b.

   Seja $a_n \in W$, então a_n é da forma $a_n(t) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j^{(n)} t^j$, onde $a_j^{(n)}$ são os coeficientes de Fourier de a_n, e portanto dão origem à sucessão $\{a_j^{(n)}\}_{j=-\infty}^{\infty}$. Admitamos que $\{a_j^{(n)}\}_{j=-\infty}^{\infty} = \{a_1^{(n)}, a_2^{(n)}, ...\}$ é uma sucessão de Cauchy em W. Assim, por definição temos,

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists N = N(\epsilon) \in \mathbb{N} : \ \|a_n - a_m\| < \epsilon, \ \textit{para todo o } m, n > N. \tag{2.3}$$

Como estamos em W*, então* $\|a_n - a_m\| = \sum_{j=-\infty}^{\infty} |a_j^{(n)} - a_j^{(m)}| < \epsilon$*. Donde para cada* $j = 1, 2, ...$ *vem, para* $m, n > N$,

$$|a_j^{(n)} - a_j^{(m)}| < \epsilon.$$

Fixemos j*. Assim temos* m *e* n *a variar e portanto obtemos uma sucessão numérica* $\{a_j^{(1)}, a_j^{(2)}, ...\}$ *de Cauchy. Atendendo ao facto de* $\mathbb{R}$ *e de* $\mathbb{C}$ *serem espaços completos, temos para* m *suficientemente grande,*

$$a_j^{(m)} \to b,$$

e assim construímos o elemento $b = \{..., b_1, b_2, ...\}$ *que pretendíamos.*

Mostremos agora que $b \in W$*. Vimos anteriormente que para* $m, n > N$,

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} |a_j^{(n)} - a_j^{(m)}| < \epsilon$$

ou, para $k = 1, 2, ...$,

$$\sum_{j=-k}^{k} |a_j^{(n)} - a_j^{(m)}| < \epsilon.$$

Consideremos m *suficientemente grande, então para* $n > N$ *vem:*

$$\sum_{j=-k}^{k} |a_j^{(n)} - b| < \epsilon.$$

Donde concluímos que $a_n - b \in W$*. Como* $a_n \in W$*, então* $b \in W$*. Atendendo ao facto de que* $a_n \in W$ *e que* $b = a_n + (b - a_n) \in W$ *temos que* $a_n \to b$.

Provemos, de seguida, que para todo o x*,* y*,* $z \in W$ *e* $\alpha \in \mathbb{C}$*:*

2. $(x\,y)z = x(y\,z)$.

   Ora, se x*,* y*,* $z \in W$*, então* $x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n t^n$*,* $y = \sum_{m=-\infty}^{\infty} y_m t^m$ *e* $z = \sum_{p=-\infty}^{\infty} z_p t^p$*, donde,*

$$\begin{aligned}(x\,y)z &= \left[\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n t^n\right)\left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} y_m t^m\right)\right]\left(\sum_{p=-\infty}^{\infty} z_p t^p\right) \\ &= [(... + x_{-2}t^{-2} + x_{-1}t^{-1} + x_0 t^0 + x_1 t^1 + x_2 t^2 + ...)\,(... + y_{-2}t^{-2} + y_{-1}t^{-1} + \\ &\quad + y_0 t^0 + y_1 t^1 + y_2 t^2 + ...)]\left(\sum_{p=-\infty}^{\infty} z_p t^p\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= [(\ldots + x_{-2}t^{-2}y_{-2}t^{-2} + x_{-2}t^{-2}y_{-1}t^{-1} + x_{-2}t^{-2}y_0t^0 + \ldots) + (\ldots + x_{-1}t^{-1} \\
&\quad y_{-2}t^{-2} + x_{-1}t^{-1}y_{-1}t^{-1} + x_{-1}t^{-1}y_0t^0 + \ldots)] \left(\sum_{p=-\infty}^{\infty} z_pt^p\right) \\
&= [(\ldots + x_{-2}y_{-2}t^{-4} + x_{-2}y_{-1}t^{-3} + x_{-2}y_0t^{-2} + \ldots) + (\ldots + x_{-1}y_{-2}t^{-3} + \\
&\quad +x_{-1}y_{-1}t^{-2} + x_{-1}y_0t^{-1} + \ldots)] \left(\sum_{p=-\infty}^{\infty} z_pt^p\right) \\
&= [\ldots + (\ldots + x_{-2}y_{-1} + x_{-1}y_{-2} + \ldots)t^{-3} + (\ldots + x_{-2}y_0 + x_{-1}y_{-1} + \ldots)t^{-2} + \ldots] \\
&\quad \left(\sum_{p=-\infty}^{\infty} z_pt^p\right) \\
&= \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_ny_m\, t^{n+m}\right) \left(\sum_{p=-\infty}^{\infty} z_pt^p\right) \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{p=-\infty}^{\infty} x_n\, y_m\, z_p\, t^{n+m+p}.
\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
x(y\,z) &= \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_nt^n\right) \left[\left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} y_mt^m\right) \left(\sum_{p=-\infty}^{\infty} z_pt^p\right)\right] \\
&= \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_nt^n\right) \left[\left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{p=-\infty}^{\infty} y_m\, z_p\, t^{m+p}\right)\right] \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{p=-\infty}^{\infty} x_n\, y_m\, z_p\, t^{n+m+p}.
\end{aligned}$$

3. $x(y+z) = x\,y + x\,z$

Ora,

$$\begin{aligned}
x(y+z) &= \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_nt^n\right) \left[\left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} y_mt^m\right) + \left(\sum_{p=-\infty}^{\infty} z_pt^p\right)\right] \\
&= \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_nt^n\right) [(\ldots + y_{-1}t^{-1} + y_0t^0 + y_1t^1 + \ldots) + \\
&\quad (\ldots + z_{-1}t^{-1} + z_0t^0 + z_1t^1 + \ldots)] \\
&= \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_nt^n\right) [\ldots + (y_{-1} + z_{-1})t^{-1} + (y_0 + z_0)t^0 + (y_1 + z_1)t^1 + \ldots]
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n t^n\right) \left(\sum_{m=p=-\infty}^{\infty} (y_p + z_p) t^p\right) \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=p=-\infty}^{\infty} x_n (y_p + z_p) t^{n+p}.
\end{aligned}
$$

Por outro lado,

$$
\begin{aligned}
x\,y + x\,z &= \left[\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n t^n\right) \left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} y_m t^m\right)\right] + \left[\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n t^n\right) \left(\sum_{p=-\infty}^{\infty} z_p t^p\right)\right] \\
&= \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_n y_m t^{n+m}\right) + \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{p=-\infty}^{\infty} x_n z_p t^{n+p}\right) \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n \sum_{m=-\infty}^{\infty} y_m t^{n+m} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n \sum_{p=-\infty}^{\infty} z_p t^{n+p} \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n \left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} y_m t^{n+m} + \sum_{p=-\infty}^{\infty} z_p t^{n+p}\right) \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n \left(\sum_{m=p=-\infty}^{\infty} (y_m + z_p) t^{n+m}\right) \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=p=-\infty}^{\infty} x_n (y_m + z_m) t^{n+m} \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=p=-\infty}^{\infty} x_n (y_p + z_p) t^{n+p}.
\end{aligned}
$$

4. $\alpha(x\,y) = (\alpha x)y = x(\alpha y)$

Ora,

$$
\begin{aligned}
\alpha(x\,y) &= \alpha \left[\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n t^n\right) \left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} y_m t^m\right)\right] \\
&= \alpha \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_n y_m t^{n+m}\right) \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \alpha x_n y_m t^{n+m}.
\end{aligned}
$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}(\alpha x)y &= \left[\alpha\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n t^n\right)\right]\left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} y_m t^m\right)\\ &= \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha x_n t^n\right)\left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} y_m t^m\right)\\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty} \alpha x_n y_m t^{n+m}\end{aligned}$$

e,

$$\begin{aligned}x(\alpha\, y) &= \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n t^n\right)\left[\alpha\left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} y_m t^m\right)\right]\\ &= \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n t^n\right)\left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} \alpha\, y_m t^m\right)\\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty} x_n\, \alpha\, y_m t^{n+m}\\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty} \alpha\, x_n y_m t^{n+m}.\end{aligned}$$

5. $\|x\, y\| \leq \|x\|\, \|y\|$

Ora,

$$\begin{aligned}x\, y &= \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n t^n\right)\left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} y_m t^m\right)\\ &= (... + x_{-1}t^{-1} + x_0t^0 + x_1t^1 + ...)(... + y_{-1}t^{-1} + y_0t^0 + y_1t^1 + ...)\\ &= ... + (... + x_{-1}t^{-1}y_{-1}t^{-1} + x_{-1}t^{-1}y_0t^0 + x_{-1}t^{-1}y_1t^1 + ...) + (... + x_0t^0y_{-1}t^{-1}\\ &\quad +x_0t^0y_0t^0 + x_0t^0y_1t^1 + ...) + (... + x_1t^1y_{-1}t^{-1} + x_1t^1y_0t^0 + x_1t^1y_1t^1 + ...) + ...\\ &= ... + (... + x_{-1}y_{-1}t^{-2} + x_{-1}y_0t^{-1} + x_{-1}y_1t^0 + ...) + (... + x_0y_{-1}t^{-1} + x_0y_0t^0 +\\ &\quad x_0y_1t^1 + ...) + (... + x_1y_{-1}t^0 + x_1y_0t^1 + x_1y_1t^2 + ...)\\ &= ... + (... + x_{-1}y_0 + x_0y_{-1} + ...)t^{-1} + (... + x_{-1}y_1 + x_0y_0 + x_1y_{-1} + ...)t^0 +\\ &\quad (... + x_0y_1 + x_1y_0 + ...)t^1 + ...\\ &= \sum_{p=-\infty}^{\infty} w_p\, t^p,\ \ com\ w_p = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_{p-m}y_m.\end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned}
\|x\,y\| &= \left\| \left(\sum_{p=-\infty}^{\infty} w_p\, t^p \right) \right\| \\
&= \sum_{p=-\infty}^{\infty} |w_p|, \ \textit{por definição de norma na álgebra de Wiener} \\
&= \sum_{p=-\infty}^{\infty} \left| \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_{p-m}\, y_m \right|, \ \textit{por definição de } w_p \\
&\le \sum_{p=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} |x_{p-m}\, y_m| \\
&= \sum_{p=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} |x_{p-m}|\, |y_m| \\
&= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{p=-\infty}^{\infty} |x_{p-m}| \right) |y_m| \\
&= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x_n| \right) |y_m|, \ \textit{com } p = n+m \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x_n| \sum_{m=-\infty}^{\infty} |y_m| \\
&= \|x\|\,\|y\|.
\end{aligned}$$

Definição 2.13 *Designamos por* ***operador*** *uma "função" que transforma elementos de um espaço linear noutro espaço linear. Um operador diz-se* ***linear*** *se:*

1. *O domínio do operador T, $\mathcal{D}(T)$, é um espaço linear e a sua imagem, $Im\,(T)$, é um subconjunto de um espaço linear;*

2. *Para todo o $x,\, y \in \mathcal{D}(T)$ e $\alpha \in \mathbb{K}(\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$,*

$$\begin{aligned}
T(x+y) &= T(x) + T(y) \\
T(\alpha x) &= \alpha\, T(x).
\end{aligned}$$

Definição 2.14 *Sejam X e Y espaços lineares e $T : X \longrightarrow Y$ um operador linear. Dizemos que T é um* ***operador limitado*** *se existe um número real c tal que*

$$\|Tx\|_Y \le c\,\|x\|_X\,, \quad \textit{para todo o} \quad x \in X.$$

Definição 2.15 *Seja M um subconjunto de um espaço métrico X. Então um ponto x_0 de X diz-se um ponto de acumulação de M se cada vizinhança de x_0 contém pelo menos um ponto $y \in M$ distinto de x_0.*

*Chama-se **fecho** de M, e representa-se por $\overline{M}$, ao conjunto formado por todos os pontos de M e por todos os pontos de acumulação de M.*

Definição 2.16 *Seja X um espaço normado. Dizemos que um conjunto A de X é **compacto** se toda a sucessão em A admite uma subsucessão convergente.*

Definição 2.17 *Sejam X e Y espaços normados. Dizemos que um operador $T : X \longrightarrow Y$ é um **operador linear compacto** se o operador T é linear e se o fecho da imagem de cada subconjunto limitado M de X é compacto, isto é, $\overline{T(M)}$ é compacto.*

Definição 2.18 *Dizemos que um operador T actuando entre espaços normados, de X para Y, é um **operador de característica finita** se o operador T é limitado e se $\dim T(X) < \infty$.*

Teorema 2.1 *Sejam X e Y espaços normados e $T : X \longrightarrow Y$ um operador linear. Então:*

1. *Se T é limitado e tem característica finita, então T é compacto.*

2. *Se a dimensão de X é finita, então T é compacto.*

Definição 2.19 *Um operador linear com domínio num espaço linear X e imagem num corpo $\mathbb{K}$ (onde $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ se X é real e $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ se X é complexo) chama-se **funcional linear** e representa-se por*

$$f : \mathcal{D}(f) \longrightarrow \mathbb{K}$$

onde $\mathcal{D}(f)$ representa o domínio de f.

Apesar de já termos definido operadores limitados, adicionamos aqui a correspondente particularização para os funcionais.

Definição 2.20 *Um funcional linear e limitado, f, é um operador linear e limitado com imagem no corpo do espaço normado X no qual está definido o domínio de f. Assim, existe um número real c tal que*

$$|f(x)| \leq c \|x\|, \quad \text{para todo o } x \in \mathcal{D}(f).$$

E mais, a norma de f é dada por:

$$\|f\| = sup_{x\in\mathcal{D}(f),\, x\neq 0}\frac{|f(x)|}{\|x\|} = sup_{x\in\mathcal{D}(f),\, \|x\|=1}|f(x)|.$$

Definição 2.21 *Seja X um espaço linear. O conjunto de todos os funcionais lineares e limitados em X constituem um espaço linear com a norma definida por:*

$$\|f\| = sup_{x\in X,\, x\neq 0}\frac{|f(x)|}{\|x\|} = sup_{x\in X,\, \|x\|=1}|f(x)|$$

que designamos por ***espaço dual*** *de X e representamos por X'.*

Sejam X e Y espaços de Banach. Vamos denotar por $\mathcal{B}(X,Y)$ o espaço de Banach de todos os operadores lineares e limitados actuando de X para Y e por $\mathcal{K}(X,Y)$ o espaço de Banach de todos os operadores compactos que também actuam de X para Y. No caso particular dos espaços de Banach actuarem de X para X é usual denotarmos $\mathcal{B}(X,X)$ por $\mathcal{B}(X)$ e $\mathcal{K}(X,X)$ por $\mathcal{K}(X)$. Para cada operador $A\in\mathcal{B}(X,Y)$ definimos a norma de A por

$$\|A\| := sup_{x\neq 0}\frac{\|A\,x\|}{\|x\|}.$$

Definição 2.22 *Seja $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ a sucessão dos operadores $A_n\in\mathcal{B}(X,Y)$. Dizemos que o operador A_n converge para o operador $A\in\mathcal{B}(X,Y)$:*

i) uniformemente (ou em norma) se $\|A_n - A\| \longrightarrow 0$, $n\to\infty$;

ii) fortemente se $\|A_n x - Ax\| \longrightarrow 0, \quad n\to\infty,$ para todo o $x\in X$;

iii) fracamente se $\|(A_n x, y) - (Ax, y)\| \longrightarrow 0, \quad n\to\infty,$ para todo o $x\in X$ e para todo o $y\in Y'$, onde Y' é o espaço dual de Y e (z,y) denota o valor do funcional y em z para todo o $z\in Y$ e $y\in Y'$.

Teorema 2.2 *Seja $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ uma sucessão de operadores lineares compactos actuando de um espaço X para um espaço de Banach Y. Se $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge uniformemente para T, então T é compacto.*

Definição 2.23 *Dizemos que um operador $A\in\mathcal{B}(X)$ é invertível à esquerda se existir um operador $B\in\mathcal{B}(X)$ que satisfaça $BA=I$. De forma análoga, dizemos que $A\in\mathcal{B}(X)$ é invertível à direita se existir um operador $B\in\mathcal{B}(X)$ tal que $AB=I$. No caso do operador ser simultaneamente invertível à esquerda e à direita então dizemos que é* ***invertível.*** *Neste caso, o operador B é o inverso do operador A e representa-se por A^{-1}.*

Definição 2.24 *Dizemos que um* ***operador*** $A \in \mathcal{B}(X)$ *é* ***de Fredholm*** *se este operador é invertível a menos de um operador compacto, isto é, se existe um operador* $B \in \mathcal{B}(X)$ *tal que*

$$AB - I \qquad e \qquad BA - I$$

são compactos.

2.2 Matrizes de Laurent

Seja $\mathbb{Z}$ o conjunto dos números inteiros ($\mathbb{Z} = \{..., -1, 0, 1, 2, ...\}$) e $\mathbb{Z}_+$ o conjuntos dos números inteiros não negativos ($\mathbb{Z}_+ := \{0, 1, 2, ...\}$).

Comecemos por definir os espaços de Banach $l^p := l^p(\mathbb{Z}_+)$ de sucessões de valores complexos:

$$l^p \quad := \left\{ x = \{x_n\}_{n=0}^{\infty} : \; x_n \in \mathbb{C}; \quad \|x\|_p^p := \sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^p < \infty \right\}, \quad \text{para} \quad 1 \leq p < \infty$$

e

$$l^\infty \quad := \left\{ x = \{x_n\}_{n=0}^{\infty} : \; x_n \in \mathbb{C}; \quad \|x\|_\infty := \sup_{n \geq 0} \, |x_n| < \infty \right\}.$$

A história das matrizes e dos operadores de Toeplitz teve início em 1911 com Otto Toeplitz. Toeplitz estudou os sistemas lineares infinitos da forma $A\,x = y$, isto é, sistemas do tipo,

$$\left[\begin{array}{ccc|cccc} \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & ⋰ \\ \dots & a_0 & a_{-1} & a_{-2} & a_{-3} & a_{-4} & \dots \\ \dots & a_1 & a_0 & a_{-1} & a_{-2} & a_{-3} & \dots \\ \hline \dots & a_2 & a_1 & a_0 & a_{-1} & a_{-2} & \dots \\ \dots & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & a_{-1} & \dots \\ \dots & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \dots \\ ⋰ & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} \vdots \\ x_{-2} \\ x_{-1} \\ \hline x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ \vdots \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} \vdots \\ y_{-2} \\ y_{-1} \\ \hline y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \vdots \end{array}\right] \tag{2.4}$$

no espaço $l^2(\mathbb{Z})$.

No decorrer do seu estudo Toeplitz descreveu o espectro do operador induzido pela matriz A, em $l^2(\mathbb{Z})$.

À matriz A (duplamente infinita) chamamos matriz de Laurent:

Definição 2.25 *Para $a \in W$, chamamos **Matriz de Laurent** à matriz*

$$A = L(a) = [a_{j-k}]_{j,k=0}^{\infty} = \left[\begin{array}{ccc|cccc} \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & ⋰ \\ \dots & a_0 & a_{-1} & a_{-2} & a_{-3} & a_{-4} & \dots \\ \dots & a_1 & a_0 & a_{-1} & a_{-2} & a_{-3} & \dots \\ \hline \dots & a_2 & a_1 & a_0 & a_{-1} & a_{-2} & \dots \\ \dots & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & a_{-1} & \dots \\ \dots & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \dots \\ ⋰ & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{array}\right] \tag{2.5}$$

onde $\{a_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ é uma sucessão de números complexos.

As matrizes de Laurent têm a particularidade de serem constantes ao longo das diagonais paralelas à diagonal principal.

Se na matriz anterior considerarmos que esta se encontra dividida nos quatro blocos acima identificados, isto é, se a matriz assumir a forma

$$A = \left[\begin{array}{c|c} B_{11} & B_{12} \\ \hline B_{21} & B_{22} \end{array}\right], \tag{2.6}$$

à matriz que se forma com a parte do bloco B_{22} vamos designar por Matriz de Toeplitz (cf. a próxima secção).

2.3 Matrizes de Toeplitz e de Hankel

Definição 2.26 *Para $a \in W$, chamamos **Matriz de Toeplitz**, e designamos por $T(a)$, à matriz infinita da forma*

$$T(a) = [a_{j-k}]_{j,k=0}^{\infty} = [B_{22}] = \begin{bmatrix} a_0 & a_{-1} & a_{-2} & \dots \\ a_1 & a_0 & a_{-1} & \dots \\ a_2 & a_1 & a_0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}. \tag{2.7}$$

Uma vez que estas matrizes resultam das matrizes de Laurent, então também são constantes ao longo das diagonais paralelas à diagonal principal. Este tipo de matrizes fica completamente determinada pelas suas entradas na primeira linha e na primeira coluna, ou seja, pela sucessão de números complexos,

$$\{a_n\}_{n=-\infty}^{\infty} = \{..., a_{-2}, a_{-1}, a_0, a_1, a_2, ...\}. \tag{2.8}$$

Observação 2.2 *Dizemos que uma matriz de Toeplitz é uma matriz em banda se e só se um número infinito de termos da sucessão* $\{a_n\}_{n=-\infty}^{\infty} = \{..., a_{-2},\ a_{-1},\ a_0,\ a_1,\ a_2, ...\}$ *são nulos.*

Note-se que uma matriz em banda pode gerar outra matriz não em forma de banda. Por exemplo, a inversa da matriz em banda

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

é a matriz de Toeplitz

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2^2} & \frac{1}{2^3} & \dots \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2^2} & \dots \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

que não é uma matriz em banda [9].

Podemos ler em [3] que a matriz (2.7) induz um operador limitado em $l^2(\mathbb{Z})$ se e só se a matriz de Toeplitz representa um operador limitado em $l^2(\mathbb{Z}_+)$.

Se considerarmos a matriz que se forma com a parte do bloco B_{21} (por troca de colunas), isto é a matriz,

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots \\ a_2 & a_3 & \cdot & \dots \\ a_3 & \cdot & \cdot & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \tag{2.9}$$

obtemos uma nova matriz que designamos por matriz de Hankel.

Definição 2.27 *Para $a \in W$, chamamos **Matriz de Hankel**, e designamos por $H(a)$, à matriz infinita da forma*

$$H(a) = [a_{j+k+1}]_{j,k=0}^{\infty} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots \\ a_2 & a_3 & \cdot & \dots \\ a_3 & \cdot & \cdot & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}. \tag{2.10}$$

De salientar que esta matriz é construída usando somente as entradas de índices positivos da sucessão geradora (2.8).

Contrariamente ao que acontecia às matrizes de Toeplitz que eram constantes ao longo das diagonais paralelas à diagonal principal, as matrizes de Hankel são constantes ao longo das diagonais paralelas à diagonal secundária.

Exemplo 2.2 *A matriz construída com a sucessão de Fibonacci [17] é um exemplo de uma matriz de Hankel e apresenta a forma seguinte:*

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & \dots \\ 1 & 2 & 3 & 5 & \dots \\ 2 & 3 & 5 & 8 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}. \tag{2.11}$$

De seguida falaremos um pouco da relação entre as matrizes de Hankel e de Toeplitz e dos seus respectivos operadores.

Como podemos ler em [18], a história dos operadores de Hankel fica a dever-se à dissertação de Hermann Hankel publicada em 1861. Na sua dissertação, Hankel tinha como objectivo estudar o determinante de uma matriz infinita complexa cujas entradas eram da forma

$$a_{j\,k} = a_{j+k+1}\,, \text{ com } j,k \geq 0, \tag{2.12}$$

onde $a = \{a_j\}_{j=0}^{\infty}$ é uma sucessão de números complexos.

Vinte anos mais tarde, Kronecker apresentou um teorema no qual afirmava que as matrizes de Hankel com característica finita são as únicas que têm as correspondentes séries de potências,

$$a(z) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j$$

que são funções racionais.

Por exemplo, a **matriz de Hilbert** dada pela sucessão $\{\frac{1}{j+k+1}\}_{j,k=0}^{\infty}$ é um exemplo famoso de uma matriz de Hankel. Esta matriz é dada por:

$$\mathcal{H}(a) = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \cdots \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \cdots \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}. \tag{2.13}$$

Mais tarde, em 1906, Hilbert ao relacionar a matriz de Hilbert com o operador induzido pela própria matriz provou que este é limitado.

O operador induzido pela matriz de Hilbert é o operador, $\mathcal{H}$, definido por:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}: \quad & l^2 \longrightarrow l^2 \\ & \{b_j\}_{j=0}^{\infty} \longmapsto \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{j+k+1}\, b_k \right\}_{j=0}^{\infty}. \end{aligned} \tag{2.14}$$

É neste teorema apresentado por Hilbert que nós podemos encontrar a origem dos operadores de Hankel. Para tal, consideremos a sucessão $\{a_j\}_{j=0}^{\infty} \in l^2$. Atendendo à definição (2.14) e à expressão (2.12) vem:

$$\begin{aligned} H: \quad & l^2 \longrightarrow l^2 \\ & \{c_j\}_{j=0}^{\infty} \longmapsto \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} a_{j+k+1}\, c_k \right\}_{j=0}^{\infty} \end{aligned}$$

que representa o operador de Hankel induzido pela matriz de Hankel.

Analogamente, atendendo a (2.7), em l^2 o operador de Toeplitz é o operador,

$$\begin{array}{rccl} T: & l^2 & \longrightarrow & l^2 \\ & \{d_j\}_{j=0}^{\infty} & \longmapsto & \left\{\sum_{k=0}^{\infty} a_{j-k}\, d_k\right\}_{j=0}^{\infty}. \end{array}$$

2.4 Operadores de Toeplitz em novos espaços

Ao longo desta secção vamos estabelecer alguns resultados importantes sobre os operadores de Toeplitz e de Hankel na álgebra de Wiener.

2.4.1 Produtos

Seja $a \in W$. Vamos definir a função

$$\widetilde{a}(t) := a\left(\frac{1}{t}\right) \qquad com \quad t \in \Gamma_0.$$

Esta função também pertence a W, pois se $a(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n\, t^n$ então $\widetilde{a}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (\frac{1}{t})^n$ $= \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n t^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{-n} t^n$. Atendendo às definições de $\widetilde{a}$, $H(a)$ e $T(a)$, as matrizes $T(\widetilde{a})$ e $H(\widetilde{a})$ são, respectivamente:

$$T(\widetilde{a}) = [a_{-j+k}]_{j,k=0}^{\infty} \;=\; \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots \\ a_{-1} & a_0 & a_1 & \dots \\ a_{-2} & a_{-1} & a_0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

$$H(\widetilde{a}) = [a_{-j-k-1}]_{j,k=0}^{\infty} \;=\; \begin{bmatrix} a_{-1} & a_{-2} & a_{-3} & \dots \\ a_{-2} & a_{-3} & \cdot & \dots \\ a_{-3} & \cdot & \cdot & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}.$$

Observemos que $T(\widetilde{a})$ é a transposta de $T(a)$, mas $H(\widetilde{a})$ em nada se assemelha a $H(a)$.

Proposição 2.3 *Se $a, b \in W$ então $T(ab) = T(a)T(b) + H(a)H(\widetilde{b})$.*

Demonstração. Pretendemos mostrar que $T(ab) = T(a)T(b) + H(a)H(\widetilde{b})$, para todo o $a, b \in W$.

Sejam então $a, b \in W$. Atendendo à Definição 2.12, vem

$$a(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m\, t^m \qquad \text{e} \qquad b(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n\, t^n$$

logo,

$$\begin{aligned}
(a\,b)(t) &= \left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m\, t^m\right)\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n\, t^n\right)\\
&= (...\,+a_{-1}t^{-1}+a_0t^0+a_1t^1+a_2t^2+...)\,(...\,+b_{-1}t^{-1}+b_0t^0+b_1t^1+b_2t^2+...)\\
&= ...+(...+a_{-1}t^{-1}b_{-1}t^{-1}+a_{-1}t^{-1}b_0t^0+a_{-1}t^{-1}b_1t^1+...)+(...+a_0t^0b_{-1}t^{-1}+\\
&\quad +a_0t^0b_0t^0+a_0t^0b_1t^1+...)+(...+a_1t^1b_{-1}t^{-1}+a_1t^1b_0t^0+a_1t^1b_1t^1+...)+...\\
&= ...+(...+a_{-1}b_{-1}t^{-2}+a_{-1}b_0t^{-1}+a_{-1}b_1t^0+...)+(...+a_0b_{-1}t^{-1}+a_0b_0t^0+\\
&\quad a_0b_1t^1+...)+(...+a_1b_{-1}t^0+a_1b_0t^1+a_1b_1t^2+...)+...\\
&= ...+(...+a_{-1}b_1+a_0b_0+a_1b_{-1}+...)t^0+(...+a_0b_1+a_1b_0+...)t^1+...\\
&= \sum_{p=-\infty}^{\infty} \phi_p\, t^p\,, \quad \text{com } \phi_p = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{p-n}b_n.
\end{aligned}$$

Ora, a entrada jk da matriz $T(a\,b)$ é dada por

$$[T(a\,b)]_{j-k} = \sum_{m+n=j-k} a_m\, b_n = \sum_{l=-\infty}^{\infty} a_{j+l}\, b_{-k-l},$$

pois se $m+n=j-k$ então $m=j-k-n$. Fazendo $l=-k-n$ temos $m=j+l$, donde vem $n=j-k-m=j-k-j-l=-k-l$.

Por outro lado, a entrada $j\,k$ da matriz $T(a)\,T(b)$ é dada por:

$$\begin{bmatrix} a_j & a_{j-1} & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{-k} \\ b_{-k+1} \\ \vdots \end{bmatrix} = a_jb_{-k}+a_{j-1}b_{-k+1}+... = \sum_{l=-\infty}^{0} a_{j+l}b_{-k-l} \tag{2.15}$$

e a mesma entrada da matriz $H(a)\,H(\widetilde{b})$ é dada por

$$\begin{bmatrix} a_{j+1} & a_{j+2} & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{-k-1} \\ b_{-k-2} \\ \vdots \end{bmatrix} = a_{j+1}b_{-k-1}+a_{j+2}b_{-k-2}+... = \sum_{l=1}^{\infty} a_{j+l}\, b_{-k-l}. \tag{2.16}$$

Assim a entrada jk da matriz $T(a)\,T(b)+H(a)\,H(\widetilde{b})$ é, atendendo a (2.15) e (2.16), dada por $\sum_{l=-\infty}^{\infty} a_{j+l}b_{-k-l}$ que é igual à entrada jk da matriz $T(ab)$ como queríamos mostrar.

Ficou assim provado que $T(ab) = T(a)\,T(b) + H(a)\,H(\widetilde{b})$.

■

A proposição anterior permite-nos concluir que o produto de duas matrizes infinitas de Toeplitz não é, normalmente, uma matriz de Toeplitz; mas, é sempre uma matriz de Toeplitz menos o produto de duas matrizes de Hankel. Ou seja,

$$T(a)\,T(b) = T(a\,b) - H(a)\,H(\widetilde{b}).$$

De seguida introduziremos duas subálgebras de W: W_+ e W_-. Sejam W_+ e W_- as álgebras de todas as funções contínuas em Γ_0 que possuem as seguintes representações

$$a_+(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\,t^n \qquad (t \in \Gamma_0)$$

e

$$a_-(t) = \sum_{n=-\infty}^{-1} a_n\,t^n \qquad (t \in \Gamma_0)\,,$$

respectivamente.

Directamente desta última definição, e atendendo ao modo como foram apresentadas as matrizes $T(a)$ e $H(\tilde{a})$, para $a \in W$ temos:

$$a \in W_+ \Longleftrightarrow H(\widetilde{a}) = 0 \Longleftrightarrow T(a) \quad \text{é uma matriz triangular inferior}$$

$$a \in W_- \Longleftrightarrow H(a) = 0 \Longleftrightarrow T(a) \quad \text{é uma matriz triangular superior.}$$

Proposição 2.4 *Se $a_- \in W_-$, $b \in W$ e $a_+ \in W_+$ então $T(a_-\,b\,a_+) = T(a_-)\,T(b)\,T(a_+)$.*

Demonstração. Atendendo ao que escrevemos anteriormente, se

$$a_- \in W_- \quad \text{então} \quad H(a_-) = 0$$

e se

$$a_+ \in W_+ \quad \text{então} \quad H(\widetilde{a}_+) = 0.$$

Assim, pela Proposição 2.3 , e como $b \in W$, $a_- \in W_-$ e $a_+ \in W_+$ então:

$$\begin{aligned}
T(a_- \, b \, a_+) &= T(a_-)\, T(b\, a_+) + H(a_-)\, H(\widetilde{b}\, \widetilde{a}_+) \\
&= T(a_-)\, T(b\, a_+)\,, \quad \text{pois} \quad H(a_-) = 0 \\
&= T(a_-)\, T(b)\, T(a_+) + H(b)\, H(\widetilde{a}_+)\,, \quad \text{pela Proposição 2.3, pois } b \in W, \\
&\qquad\qquad a_+ \in W_+ \text{ (e } W_+ \text{ é uma subálgebra de } W) \\
&= T(a_-)\, T(b)\, T(a_+)\,, \quad \text{porque} \quad H(\widetilde{a}_+) = 0.
\end{aligned}$$

Portanto, se $a_- \in W_-$, $b \in W$ e $a_+ \in W_+$ então $T(a_- b a_+) = T(a_-)\, T(b)\, T(a_+)$, como pretendíamos mostrar.

■

2.4.2 Normas

Para $n \in \mathbb{Z}$ vamos definir $\chi_n \in W$ por

$$\chi_n(t) = t^n \qquad (t \in \Gamma_0). \tag{2.17}$$

Assim, pela definição de matriz de Toeplitz e pela definição de χ_n, para $n = 0$ e para $n = 1$ temos, respectivamente,

$$T(\chi_0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} = I \qquad T(\chi_1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}. \tag{2.18}$$

Portanto, a matriz $T(\chi_n)$ apresenta unidades numa única diagonal paralela à diagonal principal e zeros em tudo o resto. Assim, para $n \geq 0$ temos

$$T(\chi_n)x = \{\underbrace{0, ..., 0}_{n}, x_0, x_1, ...\}\ , \quad T(\chi_{-n})x = \{x_n, x_{n+1}, ...\}. \tag{2.19}$$

Note-se que a matriz $T(\chi_0)$ é a matriz identidade.

De forma análoga, $H(\chi_n)$ é a matriz zero para $n \leq 0$, e para $n \geq 1$ é a matriz que tem uma única antidiagonal com identidades, sendo tudo o resto nulo, actuando em consequência do seguinte modo,

$$H(\chi_n)x = \{x_{n-1}, x_{n-2}, ..., x_0, 0, 0, ...\}, \quad \text{para} \ \ n \geq 1. \tag{2.20}$$

Observação 2.3 *Mostremos de seguida que os operadores de Toeplitz e de Hankel são lineares.*

Ora, pretendemos então verificar que para todo o $x,\, y \in l^p(\mathbb{Z})$ *e* $\alpha \in \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$*, temos* $T(x+y) = T(x) + T(y)$ *e* $T(\alpha\, x) = \alpha\, T(x)$*. Iremos aqui mostrar a primeira igualdade.*

Sejam $n \in \mathbb{N}$*,* $x = \{x_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ *e* $y = \{y_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$*, então*

$$
\begin{aligned}
T(x+y) &= T(\{..., x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_1, x_2, ...\} + \{..., y_{-2}, y_{-1}, y_0, y_1, y_2, ...\}) \\
&= T(\{..., x_{-2}+y_{-2}, x_{-1}+y_{-1}, x_0+y_0, x_1+y_1, x_2+y_2, ...\})
\end{aligned}
$$

$$
= \begin{bmatrix} x_0+y_0 & x_{-1}+y_{-1} & x_{-2}+y_{-2} & \cdots \\ x_1+y_1 & x_0+y_0 & x_{-1}+y_{-1} & \cdots \\ x_2+y_2 & x_1+y_1 & x_0+y_0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}.
$$

Por outro lado,

$$
\begin{aligned}
T(x)+T(y) &= \begin{bmatrix} x_0 & x_{-1} & x_{-2} & \cdots \\ x_1 & x_0 & x_{-1} & \cdots \\ x_2 & x_1 & x_0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_0 & y_{-1} & y_{-2} & \cdots \\ y_1 & y_0 & y_{-1} & \cdots \\ y_2 & y_1 & y_0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} x_0+y_0 & x_{-1}+y_{-1} & x_{-2}+y_{-2} & \cdots \\ x_1+y_1 & x_0+y_0 & x_{-1}+y_{-1} & \cdots \\ x_2+y_2 & x_1+y_1 & x_0+y_0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

Analogamente, temos:

$$
\begin{aligned}
H(x+y) &= H(\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, ...\} + \{y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, ...\}) \\
&= H(\{x_1+y_1, x_2+y_2, x_3+y_3, x_4+y_4, x_5+y_5, ...\})
\end{aligned}
$$

$$
= \begin{bmatrix} x_1+y_1 & x_2+y_2 & x_3+y_3 & \cdots \\ x_2+y_2 & x_3+y_3 & x_4+y_4 & \cdots \\ x_3+y_3 & x_4+y_4 & x_5+y_5 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}
$$

e,

$$H(x) + H(y) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \dots \\ x_2 & x_3 & x_4 & \dots \\ x_3 & x_4 & x_5 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & y_3 & \dots \\ y_2 & y_3 & y_4 & \dots \\ y_3 & y_4 & y_5 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} x_1 + y_1 & x_2 + y_2 & x_3 + y_3 & \dots \\ x_2 + y_2 & x_3 + y_3 & x_4 + y_4 & \dots \\ x_3 + y_3 & x_4 + y_4 & x_5 + y_5 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}.$$

Definição 2.28 *Dizemos que uma matriz infinita $A = [a_{jk}]_{j,k=0}^{\infty}$* ***induz um operador limitado*** *em l^p se existir uma constante $C \in]0, \infty[$ tal que para cada $x = \{x_n\}_{n=0}^{\infty} \in l^p$ se tem:*

$$\sum_{j=0}^{\infty} \left| \sum_{k=0}^{\infty} a_{jk}\, x_k \right|^p \leq C^p \sum_{k=0}^{\infty} |x_k|^p. \tag{2.21}$$

Existe um modo natural de associar uma matriz $n \times n$ a um operador linear.

Observação 2.4 *Mostremos que cada operador $A \in \mathcal{B}(l^p)$ pode ser representado por uma matriz.*

Para tal vamos definir o operador,

$$\begin{aligned} A : l^p &\longrightarrow l^p \\ x = \{x_0, x_1, x_2, x_3, ...\} &\longmapsto Ax = A\{x_0, x_1, x_2, x_3, ...\} = \{y_0, y_1, y_2, y_3, ...\}. \end{aligned}$$

Temos, $A \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \end{bmatrix}$. *Assim,* $A = [a_{ij}]_{i,j=0}^{\infty} = \begin{bmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} & \dots \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} & \dots \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} & \dots \\ a_{30} & a_{31} & a_{32} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$.

Observemos que cada entrada a_{ij} da matriz $[a_{ij}]_{i,j=0}^{\infty}$ é dada pela multiplicação da matriz A por cada vector da base canónica, $\{e_j\}_{j=1}^{\infty}$ onde e_j é a sucessão (ou o vector) cuja j-ésima *entrada é 1 e as restantes são zero. Ora,* $A \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{00} \\ a_{10} \\ a_{20} \\ a_{30} \\ \vdots \end{bmatrix}$. *Portanto o operador* A *é dado por,*

$$\begin{bmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} & \cdots \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} & \cdots \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} & \cdots \\ a_{30} & a_{31} & a_{32} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \end{bmatrix},$$

onde $y = \sum_{j=0}^{\infty} a_{ij} x_j$.

Podemos então dizer que se $A = [a_{jk}]_{j,k=0}^{\infty}$ *induz um operador limitado em* l^p, *então* A *é um operador limitado em* l^p *que actua de acordo com a regra,*

$$y = Ax \qquad \textit{com} \qquad \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} & \cdots \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} & \cdots \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} & \cdots \\ a_{30} & a_{31} & a_{32} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \end{bmatrix}$$

depois de escrevermos os elementos de l^p *como vectores coluna.*

Se A *induzir um operador limitado em* l^p, *então existe um* C *para o qual a desigualdade (2.21) é verdadeira para todo o* $x \in l^p$. *Esse número* C *é a norma de* A *e denota-se por*

$$\|A\|_p \quad := \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_p}{\|x\|_p} = \sup_{\|x\|_p = 1} \|Ax\|_p \,. \tag{2.22}$$

De facto, considerando $\|x\|_p = a$ *e* $y = \frac{1}{a}x, \; x \neq 0$ *então*

$$\|y\|_p = \left\| \frac{1}{a} x \right\|_p = \frac{1}{a} \|x\|_p = 1.$$

Assim, como A *é linear,*

$$\|A\|_p = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_p}{\|x\|_p} = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_p}{a} = \sup_{x \neq 0} \left\| A \left(\frac{1}{a} x \right) \right\|_p = \sup_{\|y\|=1} \|Ay\|.$$

Fazendo $x = y$ *nesta última expressão concluímos o pretendido.*

Se A *não induzir um operador limitado em* l^p, *escrevemos* $\|A\|_p = \infty$.

Proposição 2.5 *Se $a \in W$, então os operadores $T(a)$ e $H(a)$ induzem operadores limitados no espaço l^p, com $1 \leq p \leq \infty$, e*

$$\|T(a)\|_p \leq \|a\|_W$$

$$\|H(a)\|_p \leq \|a\|_W.$$

Demonstração. Se $a \in W$, então, por (2.2),

$$a(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n t^n$$

e consequentemente,

$$\begin{aligned} T(a) &= T\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n t^n\right) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n T(t^n), \text{ porque } T \text{ é um operador linear} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n T(\chi_n(t)), \text{ por (2.17)} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n T(\chi_n) \end{aligned}$$

donde,

$$\|T(a)\|_p = \left\| \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n\, T(\chi_n) \right\| \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n|\, \|T(\chi_n)\| \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n| = \|a\|_W$$

pois, $\|T(\chi_n)\| = 1$ (para todo o n) devido a (2.19) e ao facto de $t \in \Gamma_0$.

Temos portanto $\|T(a)\|_p \leq \|a\|_W$.

Mostremos agora, de forma análoga, que $\|H(a)\|_p \leq \|a\|_W$. Ora, se $a \in W$ então, por (2.2),

$$a(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n t^n.$$

Tendo-se então

$$\begin{aligned} H(a) &= \sum_{n=1}^{\infty} H(a_n t^n), \text{ porque a matriz de Hankel é construída usando somente as entra-} \\ &\qquad\qquad\qquad \text{das de índices positivos} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} H(a_n \chi_n), \text{ por (2.17)} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n H(\chi^n), \text{ porque } H \text{ é um operador linear} \end{aligned}$$

logo,

$$\|H(a)\|_p = \left\| \sum_{n=1}^{\infty} a_n H(\chi_n) \right\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \; \|H(\chi_n)\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \|a\|_W$$

pois, $\|H(\chi_n)\| = 1 \quad (\text{para} \quad n \geq 1)$ devido a (2.20) e ao facto de $t \in \Gamma_0$. Concluímos então que $\|H(a)\|_p \leq \|a\|_W$.

■

Esta proposição permite-nos olhar para $T(a)$ e $H(a)$ como operadores lineares limitados em l^p.

Por outro lado, é interessante observar que

$$H(a) = H(b) \Longleftrightarrow a_n = b_n, \qquad \text{para todo o } n \geq 1$$

ficando assim claro que a igualdade das matrizes de Hankel fica definida somente pelos valores das respectivas sucessões nas suas partes de índices positivos.

Para os operadores de Hankel podemos ainda afirmar que:

Proposição 2.6 *Se $a \in W$, então $H(a)$ é compacto em l^p* $\quad (1 \leq p \leq \infty)$.

Demonstração. Temos, por hipótese, que $a \in W$. Assim, pela Proposição 2.5, $H(a)$ é um operador limitado em l^p, com $1 \leq p \leq \infty$ e,

$$\|H(a)\|_p \leq \|a\|_W.$$

Para cada $N \in \mathbb{N}_0$ vamos definir o operador

$$(S_N a)(t) := \sum_{n=-N}^{N} a_n t^n \quad (t \in \Gamma_0).$$

Atendendo à definição de $H(a)$, vem:

$$H(S_N a) = \begin{bmatrix} a_1 & \dots & a_N & 0 & \dots \\ \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \\ a_N & \dots & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

que é naturalmente um operador de característica finita. Como $H(S_N a)$ é um operador linear, limitado e tem característica finita, então pelo Teorema 2.1, podemos afirmar que o operador $H(S_N a)$ é compacto. Obtivemos assim uma sucessão de operadores lineares compactos, $\{H(S_N a)\}_{N=0}^{\infty}$.

Por outro lado, temos:

$$\begin{aligned}
\|H(S_N a) - H(a)\|_p &= \|H(S_N a - a)\|_p\,, \text{ porque } H \text{ é um operador linear} \\
&\leq \|S_N a - a\|_W\,, \text{ pela Proposição 2.5} \\
&= \left\| \sum_{n=-N}^{N} a_n t^n - \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n t^n \right\| \\
&= \|(a_{-N} t^{-N} + a_{-N+1} t^{-N+1} + ... + a_N t^N) - (... + a_{-N} t^{-N} + ... + \\
&\quad + a_N t^N + a_{N+1} t^{N+1} + ...)\| \\
&= \left\| \sum_{|n|>N} a_n t^n \right\| \\
&= \sum_{|n|>N} |a_n|\,, \text{ por definição de } \|\cdot\|_W.
\end{aligned}$$

Ou seja, $\|H(S_N a) - H(a)\|_p \leq \sum_{|n|>N} |a_n|$. Para N suficientemente grande, $\|H(S_N a) - H(a)\|$ converge para zero, ou seja $H(S_N a)$ converge uniformemente para $H(a)$. Assim, pelo Teorema 2.2, $H(a)$ é compacto.

∎

Dizemos que uma matriz infinita $A = [a_{j\,k}]_{j,\,k=0}^{\infty}$ induz um operador limitado em l^1 e em l^∞, respectivamente, se e só se,

$$\sup_{k \geq 1} \sum_{j=1}^{\infty} |a_{jk}| < \infty \quad \text{e} \quad \sup_{j \geq 1} \sum_{k=1}^{\infty} |a_{jk}| < \infty.$$

Nestes casos, temos:

$$\|A\|_1 = \sup_{k\geq 1} \sum_{j=1}^{\infty} |a_{jk}| \quad \text{e} \quad \|A\|_\infty = \sup_{j\geq 1} \sum_{k=1}^{\infty} |a_{jk}|\,,$$

respectivamente.

Com base nestes resultados podemos estabelecer o seguinte teorema:

Teorema 2.7 *Se $a \in W$, então*

$$\|T(a)\|_1 = \|T(a)\|_\infty = \|a\|_W\,.$$

Demonstração. Para $a \in W$, temos

$$T(a) = [a_{j-k}]_{j,k=0}^{\infty} = \begin{bmatrix} a_0 & a_{-1} & a_{-2} & \dots \\ a_1 & a_0 & a_{-1} & \dots \\ a_2 & a_1 & a_0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}. \tag{2.23}$$

Por definição,

$$\|T(a)\|_1 = \sup_{k\geq 1} \sum_{j=1}^{\infty} |a_{j-k}|.$$

Para $k \geq 1$, como cada coluna k contém todos os elementos da coluna anterior mais o elemento a_{-k}, então

$$\begin{aligned} \|T(a)\|_1 &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n| \\ &= \|a\|_W, \text{ por definição.} \end{aligned} \tag{2.24}$$

Por outro lado,

$$\|T(a)\|_\infty = \sup_{j\geq 1} \sum_{k=1}^{\infty} |a_{j-k}|\,, \text{ por definição.}$$

Analogamente, para $j \geq 1$, cada linha j da matriz $T(a)$ contém todos os elementos da linha anterior mais o elemento a_j, assim

$$\begin{aligned} \|T(a)\|_\infty &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n| \\ &= \|a\|_W\,, \text{ por definição.} \end{aligned} \tag{2.25}$$

Por (2.24) e por (2.25) concluímos que, $\|T(a)\|_1 = \|T(a)\|_\infty = \|a\|_W$.

■

Introduziremos de seguida dois novos espaços - o espaço L^2 e o espaço H^2.

Seja $L^2 := L^2(\Gamma_0)$ o espaço de Lebesgue das funções de valores complexos em Γ_0 com norma,

$$\|f\|_2 := \left(\int_{\Gamma_0} |f(t)|^2 \, \frac{|dt|}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\int_0^{2\pi} |f(e^{i\theta})|^2 \, \frac{d\theta}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Cada função de L^2 é da forma

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n t^n \qquad (t \in \Gamma_0). \tag{2.26}$$

Se neste espaço considerarmos apenas as funções f cujos coeficientes f_n são nulos para índices n negativos obtemos um novo espaço, o **espaço de Hardy**. Assim definimos,

$$H^2 := H^2(\Gamma_0) := \{f \in L^2 : f_n = 0\,,\ \ n < 0\}.$$

Seja $P : L^2 \longrightarrow H^2$ a projecção ortogonal correspondente.

Atendendo a (2.26) temos,

$$(Pf)(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n t^n \quad (t \in \Gamma_0).$$

Tendo por base as definições anteriores, podemos definir o **operador de Toeplitz** agora no contexto dos espaços L^2 no seguinte modo:

$$\begin{aligned} T(a): \quad L^2 &\longrightarrow L^2 \\ f &\longmapsto P(af), \end{aligned}$$

onde $a \in L^\infty$ é designado por símbolo do operador.

O espaço L^∞ é o espaço de Lebesgue em Γ_0 onde está definida a norma, $\|f\|_\infty = max_{t\in\Gamma_0} |f(t)|$.

Ao longo da secção 2.3 introduzimos os operadores de Hankel e de Toeplitz a partir das respectivas matrizes no caso "discreto". Façamos agora um estudo análogo mas para o caso "contínuo".

Sejam $H^2_- := \{f \in L^2 : f_n = 0\,,\ \text{para todo o } n \geq 0\}$, onde $f_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{i\theta})e^{-in\theta}\,d\theta$ é o n-ésimo coeficiente de Fourier de f e Q é a projecção ortogonal correspondente dada por:

$$\begin{array}{rcl} Q : L^2 & \longrightarrow & H^2_- \\ \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n t^n & \longmapsto & \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{-1} f_n t^n. \end{array}$$

O operador,

$$\begin{array}{rcl} H_Q(a) : H^2 & \longrightarrow & H^2_- \\ f & \longmapsto & H_Q(a)f = Q(af) \end{array}$$

define um operador do tipo de Hankel.

Contudo, podemos definir um outro tipo de operador de Hankel, mas para isso é necessário introduzirmos um novo operador, o operador de deslocamento:

$$\begin{array}{rcl} J_{\Gamma_0} : L^2 & \longrightarrow & L^2 \\ f(t) & \longmapsto & (J_{\Gamma_0}f)(t) = t^{-1}f(t^{-1}) = \dfrac{1}{t}f\left(\dfrac{1}{t}\right) = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n t^{-n-1}. \end{array}$$

Nestas condições, vamos então definir um outro tipo de operador de Hankel por:

$$\begin{array}{rcl} H_J(a) : H^2 & \longrightarrow & H^2 \\ f & \longmapsto & H_J(a)f = Pa\, J_{\Gamma_0} f\,. \end{array}$$

Seja Φ de H^2 para l^2 o operador unitário dado por:

$$\begin{array}{rcl} \Phi : \ H^2 & \longrightarrow & l^2 \\ f & \longmapsto & \{f_n\}_{n=0}^{\infty}. \end{array}$$

Logo, o operador Φ^{-1} é naturalmente o operador:

$$\begin{array}{rcl} \Phi^{-1} : l^2 & \longrightarrow & H^2 \\ \{f_n\}_{n=0}^{\infty} & \longmapsto & f. \end{array}$$

O operador $\Phi^{-1}\,T(a)\,\Phi$ para $a \in W$ e para $T(a) : l^2 \longrightarrow l^2$, definido nas secções anteriores, é o operador definido por:

$$\begin{aligned} \Phi^{-1}\, T(a)\, \Phi \ : \quad H^2 &\longrightarrow H^2 \\ f &\longmapsto P(a\, f), \end{aligned} \tag{2.27}$$

onde $(a\, f)(t) := a(t)\, f(t)$.

Observação 2.5 *Seja M o operador de multiplicação em L^2 gerado pela função $a \in L^\infty$ e dado por:*

$$\begin{aligned} M(a) : L^2 &\longrightarrow L^2 \\ f &\longmapsto a\, f. \end{aligned} \tag{2.28}$$

Atendendo a (2.28) podemos mostrar que

$$T(a) + H_Q(a) = M(a). \tag{2.29}$$

Ora, para $f \in L^2$ temos

$$\begin{aligned} T(a\, f) + H_Q(a\, f) &= P(a\, f) + Q(a\, f) \\ &= (P + Q)(a\, f) \\ &= I(a\, f) \\ &= a\, f = M(a\, f). \end{aligned}$$

O operador de multiplicação pode também ser frequentemente denotado por:

$$\begin{aligned} L(a) : L^2 &\longrightarrow L^2 \\ f &\longmapsto a\, f, \text{ onde } L(a) \text{ representa o operador de Laurent.} \end{aligned}$$

Assim, os operadores de Toeplitz e de Hankel [1] assumirão a forma seguinte:

$$T(a) = P\, L(a)\, P|_{H^2},$$

$$H_J(a) = P\, L(a)\, J\, P|_{H^2}.$$

E consequentemente,

$$M(a) = P\, L(a)\, (I + J)\, P|_{H^2},$$

pois por (2.29), vem:

$$\begin{aligned} M(a) &= P\, L(a)\, P|_{H^2} + P\, L(a)\, J\, P|_{H^2} \\ &= P\, L(a)\, I\, P|_{H^2} + P\, L(a)\, J\, P|_{H^2} \\ &= P\, L(a)\, (I + J)\, P|_{H^2}. \end{aligned}$$

Tendo por base os resultados apresentados na Observação 2.5 podemos estabelecer a seguinte proposição:

Proposição 2.8 *Seja $a \in L^\infty$. Então,*

$$\|a\|_{L^\infty} \leq \|M(a)\|_{\mathcal{B}(H^2)} \leq 2\|a\|_{L^\infty}.$$

Demonstração. Para provar o pretendido temos que mostrar que $\|M(a)\|_{\mathcal{B}(H^2)} \leq 2\|a\|_{L^\infty}$ e que $\|M(a)\|_{\mathcal{B}(H^2)} \geq \|a\|_{L^\infty}$. Comecemos então por mostrar que $\|M(a)\|_{\mathcal{B}(H^2)} \leq 2\|a\|_{L^\infty}$. Ora,

$$\begin{aligned}
\|M(a)\| &= \|P\,L(a)\,(I+J)\,P\| \\
&= \|P\,L(a)\,I\,P + P\,L(a)\,J\,P\| \\
&\leq \|P\,L(a)\,I\,P\| + \|P\,L(a)\,J\,P\| \\
&= \|T(a)\| + \|H_J(a)\| \\
&\leq \|a\|_{L^\infty} + \|a\|_{L^\infty} \\
&= 2\|a\|_{L^\infty},
\end{aligned}$$

onde a última desigualdade é conhecida para o presente caso e generaliza o caso discreto ilustrado na Proposição 2.5 para a situação de símbolos de Fourier na álgebra de Wiener (a este título remetemos o leitor também para o futuro Teorema 4.5).

Para mostrar que $\|M(a)\| \geq \|a\|_{L^\infty}$ vamos considerar $U_n = M(t^n)$ e mostrar, primeiramente, que:

1. $U_n U_{-n} = I$

   Seja $f \in L^2$, então $f = \sum_{j=-\infty}^{\infty} f_j t^j$. Temos,

$$\begin{aligned}
U_n U_{-n} f &= U_n(U_{-n} f) \\
&= U_n\left(M(t^{-n})\left(\sum_{j=-\infty}^{\infty} f_j\,t^j\right)\right) \\
&= U_n\left(t^{-n}\sum_{j=-\infty}^{\infty} f_j\,t^j\right) \\
&= U_n\left(\sum_{j=-\infty}^{\infty} f_j\,t^{-n}t^j\right) \\
&= U_n\left(\sum_{j=-\infty}^{\infty} f_j\,t^{j-n}\right) \\
&= M(t^n)\left(\sum_{j=-\infty}^{\infty} f_j\,t^{j-n}\right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= t^n \left(\sum_{j=-\infty}^{\infty} f_j \, t^{j-n} \right) \\
&= \sum_{j=-\infty}^{\infty} f_j \, t^j \\
&= f \\
&= I(f).
\end{aligned}
$$

2. $L(a)U_n = U_n L(a)$.

   Para $f \in L^2$ temos,

$$
\begin{aligned}
(L(a)U_n)f &= L(a)(U_n f) \\
&= L(a) \left(M(t^n) \left(\sum_{j=-\infty}^{\infty} f_j \, t^j \right) \right) \\
&= L(a) \left(t^n \sum_{j=-\infty}^{\infty} f_j \, t^j \right) \\
&= L(a) \left(\sum_{j=-\infty}^{\infty} f_j \, t^{n+j} \right) \\
&= a \sum_{j=-\infty}^{\infty} f_j \, t^{n+j}
\end{aligned}
$$

   e,

$$
\begin{aligned}
(U_n L(a))f &= U_n(L(a)f) \\
&= U_n \left(L(a) \left(\sum_{j=-\infty}^{\infty} f_j \, t^j \right) \right) \\
&= U_n \left(a \sum_{j=-\infty}^{\infty} f_j \, t^j \right) \\
&= M(t^n) \left(a \sum_{j=-\infty}^{\infty} f_j \, t^j \right) \\
&= t^n \left(a \sum_{j=-\infty}^{\infty} f_j \, t^j \right) \\
&= a \sum_{j=-\infty}^{\infty} f_j \, t^{n+j}.
\end{aligned}
$$

3. $J\,U_n = U_{-n}J$.

   Ora, para $f \in L^2$ temos,

$$\begin{aligned}
(J\,U_n)f &= J(U_n(f)) \\
&= J\left(M(t^n)\left(\sum_{j=-\infty}^{\infty} f_j\,t^j\right)\right) \\
&= J\left(t^n\left(\sum_{j=-\infty}^{\infty} f_j\,t^j\right)\right) \\
&= J\left(\sum_{j=-\infty}^{\infty} f_j\,t^{j+n}\right) \\
&= \sum_{j=-\infty}^{\infty} f_j\,t^{-j-n-1},\ \text{por definição de J}
\end{aligned}$$

   e,

$$\begin{aligned}
(U_{-n}J)(f) &= U_{-n}J\left(\sum_{j=-\infty}^{\infty} f_j\,t^j\right) \\
&= M(t^{-n})\left(\sum_{j=-\infty}^{\infty} f_j\,t^{-j-1}\right),\ \text{por definição de J} \\
&= t^{-n}\left(\sum_{j=-\infty}^{\infty} f_j\,t^{-j-1}\right) \\
&= \sum_{j=-\infty}^{\infty} f_j\,t^{-n}t^{-j-1} \\
&= \sum_{j=-\infty}^{\infty} f_j\,t^{-j-n-1}.
\end{aligned}$$

4. $L(a)U_{-n} = U_{-n}L(a)$.

   Para $f \in L^2$ vem:

$$\begin{aligned}
(L(a)U_{-n})f &= L(a)(U_{-n}f) \\
&= L(a)\left(M(t^{-n})\left(\sum_{j=-\infty}^{\infty} f_j\,t^j\right)\right) \\
&= L(a)\left(t^{-n}\left(\sum_{j=-\infty}^{\infty} f_j\,t^j\right)\right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= L(a)\left(\sum_{j=-\infty}^{\infty} f_j t^{-n+j}\right) \\
&= a \sum_{j=-\infty}^{\infty} f_j\, t^{-n+j}
\end{aligned}
$$

e,

$$
\begin{aligned}
(U_{-n}L(a))f &= U_{-n}\left(L(a)\left(\sum_{j=-\infty}^{\infty} f_j\, t^j\right)\right) \\
&= U_{-n}\left(a\sum_{j=-\infty}^{\infty} f_j\, t^j\right) \\
&= M(t^{-n})\left(a\sum_{j=-\infty}^{\infty} f_j\, t^j\right) \\
&= t^{-n}\left(a\sum_{j=-\infty}^{\infty} f_j\, t^j\right) \\
&= a\sum_{j=-\infty}^{\infty} f_j\, t^{-n+j}.
\end{aligned}
$$

Portanto,

$$
\begin{aligned}
U_{-n}M(a)U_n &= U_{-n}PL(a)(I+J)PU_n \\
&= U_{-n}PL(a)IPU_n + U_{-n}PL(a)JPU_n \\
&= U_{-n}PL(a)U_nU_{-n}PU_n + U_{-n}PL(a)JIPU_n, \text{ pois } U_nU_{-n} = I \\
&= U_{-n}PU_nL(a)U_{-n}PU_n + U_{-n}PL(a)JU_nU_{-n}PU_n, \text{ pois } L(a)U_n = U_nL(a) \\
&\qquad \text{e } U_nU_{-n} = I \\
&= (U_{-n}PU_n)L(a)(U_{-n}PU_n) + U_{-n}PL(a)U_{-n}JU_{-n}PU_n, \text{ pois } JU_n = U_{-n}J \\
&= (U_{-n}PU_n)L(a)(U_{-n}PU_n) + U_{-n}PU_{-n}L(a)JU_{-n}PU_n, \text{ pois } L(a)U_{-n} = \\
&\qquad U_{-n}L(a) \\
&= (U_{-n}PU_n)L(a)(U_{-n}PU_n) + (U_{-n}PU_{-n})L(a)J(U_{-n}PU_n).
\end{aligned}
$$

Mostremos agora que $(U_{-n}PU_n)$ converge fortemente para I e $(U_{-n}PU_{-n})$ converge fortemente para 0.

Para $x \in L^2$, temos:

$$\begin{aligned}
\|U_{-n}PU_nx - I\,x\| &= \left\|(U_{-n}PU_n)\left(\sum_{j=-\infty}^{\infty} x_j\,t^j\right) - \left(\sum_{j=-\infty}^{\infty} x_j\,t^j\right)\right\| \\
&= \left\|U_{-n}\left(P\left(U_n\left(\sum_{j=-\infty}^{\infty} x_j\,t^j\right)\right)\right) - \left(\sum_{j=-\infty}^{\infty} x_j\,t^j\right)\right\| \\
&= \left\|U_{-n}\left(P\left(M(t^n)\left(\sum_{j=-\infty}^{\infty} x_j\,t^j\right)\right)\right) - \left(\sum_{j=-\infty}^{\infty} x_j\,t^j\right)\right\| \\
&= \left\|U_{-n}\left(P\left(t^n\sum_{j=-\infty}^{\infty} x_j\,t^j\right)\right) - \sum_{j=-\infty}^{\infty} x_j\,t^j\right\| \\
&= \left\|U_{-n}\left(P\left(\sum_{j=-\infty}^{\infty} x_j\,t^{j+n}\right)\right) - \sum_{j=-\infty}^{\infty} x_j\,t^j\right\| \\
&= \left\|U_{-n}\left(P\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} x_{k-n}\,t^k\right)\right) - \sum_{j=-\infty}^{\infty} x_j\,t^j\right\| \\
&= \left\|U_{-n}\left(\sum_{k=0}^{\infty} x_{k-n}\,t^k\right) - \sum_{j=-\infty}^{\infty} x_j\,t^j\right\| \\
&= \left\|U_{-n}\left(\sum_{j=-n}^{\infty} x_j\,t^{j+n}\right) - \sum_{j=-\infty}^{\infty} x_j\,t^j\right\| \\
&= \left\|M(t^{-n})\left(\sum_{j=-n}^{\infty} x_j\,t^{j+n}\right) - \sum_{j=-\infty}^{\infty} x_j\,t^j\right\| \\
&= \left\|t^{-n}\left(\sum_{j=-n}^{\infty} x_j\,t^{j+n}\right) - \sum_{j=-\infty}^{\infty} x_j\,t^j\right\| \\
&= \left\|\sum_{j=-n}^{\infty} x_j\,t^{j+n-n} - \sum_{j=-\infty}^{\infty} x_j\,t^j\right\| \\
&= \left\|\sum_{j=-n}^{\infty} x_j\,t^j - \sum_{j=-\infty}^{\infty} x_j\,t^j\right\| \\
&= \left\|\sum_{j=-\infty}^{-n-1} x_j\,t^j\right\|.
\end{aligned}$$

Para n suficientemente grande, $\lim_{n\to\infty}\|U_{-n}\,P\,U_nx - I\,x\| = 0$ e portanto, $U_{-n}\,P\,U_n$ converge fortemente para I.

Para concluir a prova falta ainda mostrar que $U_{-n}PU_{-n}$ converge fortemente para zero. Ora, para $x \in L^2$, temos:

$$
\begin{aligned}
\|U_{-n}PU_{-n}x\| &= \left\|(U_{-n}PU_{-n})\left(\sum_{j=-\infty}^{\infty} x_j\, t^j\right)\right\| \\
&= \left\|(U_{-n}P)\left(M(t^{-n})\sum_{j=-\infty}^{\infty} x_j\, t^j\right)\right\| \\
&= \left\|(U_{-n}P)\left(t^{-n}\sum_{j=-\infty}^{\infty} x_j\, t^j\right)\right\| \\
&= \left\|(U_{-n}P)\left(\sum_{j=-\infty}^{\infty} x_j\, t^{-n+j}\right)\right\| \\
&= \left\|(U_{-n}P)\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} x_{k+n}\, t^k\right)\right\| \\
&= \left\|U_{-n}\left(\sum_{k=0}^{\infty} x_{k+n}\, t^k\right)\right\| \\
&= \left\|U_{-n}\left(\sum_{j=n}^{\infty} x_j\, t^{-n+j}\right)\right\| \\
&= \left\|M(t^{-n})\left(\sum_{j=n}^{\infty} x_j\, t^{-n+j}\right)\right\| \\
&= \left\|t^{-n}\left(\sum_{j=n}^{\infty} x_j\, t^{-n+j}\right)\right\| \\
&= \left\|\sum_{j=n}^{\infty} x_j\, t^{-n+j}t^{-n}\right\| \\
&= \left\|\sum_{j=n}^{\infty} x_j\, t^{-2n+j}\right\| \\
&= \left\|\sum_{j=n}^{\infty} x_j\, t^{-2n}t^j\right\|.
\end{aligned}
$$

Para n suficientemente grande temos, $\lim_{n\to\infty}\left\|\sum_{j=0}^{\infty} x_j\, t^{-2n}t^j\right\| = 0$, ou seja, $U_{-n}PU_{-n}$ converge fortemente para zero.

Concluímos então que $U_{-n}M(a)U_n$ converge fortemente para $L(a)$ e dado que $U_{\pm n}$ são isometrias obtemos a primeira desigualdade.

■

Observação 2.6 *A Proposição que acabámos de mostrar é um caso particular do resultado:*

Seja $a \in L^\infty$. *Então* $\|a\|_{L^\infty} \le \|M(a)\|_{\mathcal{B}(H^p)} \le C_p\|a\|_{L^\infty}$, *onde* C_p *é uma constante que depende do parâmetro* p *[1].*

Capítulo 3

Factorizações

Neste capítulo, o objectivo central passa por descrever condições para que o símbolo do operador, na álgebra de Wiener, possa ser escrito na forma $a(t) = a_-(t)t^m a_+(t)$, com $t \in \Gamma_0$, onde $a_\pm$ são elementos invertíveis em $W_\pm$. De uma forma mais global, estudamos ainda a factorização em álgebras de Banach decomponíveis.

3.1 Factorização de Wiener-Hopf

3.1.1 Teorema de Wiener

Teorema 3.1 (Teorema de Wiener) *Seja $\mathcal{G}\,W$ o grupo de todos os elementos invertíveis da álgebra de Wiener, W. Tem-se,*

$$a \in \mathcal{G}\,W \Longleftrightarrow a \in W \quad \wedge \quad (\exists\, b \in W : a(t)\, b(t) = 1, \quad \textit{para todo o} \quad t \in \Gamma_0).$$

Antes de apresentarmos a demonstração do teorema acima enunciado vamos apresentar a seguinte observação:

Observação 3.1 *O teorema de Wiener pode também ser enunciado da forma seguinte: Se $a \in W$ e $a(t) \neq 0$, para todo o $t \in \Gamma_0$, então $a^{-1} = \frac{1}{a} \in W$ [5].*

Demonstração. Para mostrar que $a \in \mathcal{G}\,W \Longleftrightarrow a \in W \ \wedge \ (\exists\, b \in W : a(t)\, b(t) = 1,$ para todo o $t \in \Gamma_0)$ vamos mostrar que, se $a \in \mathcal{G}\,W \Longrightarrow a \in W \ \wedge \ (\exists\, b \in W : a(t)\, b(t) = 1,$ para todo o $t \in \Gamma_0)$ e que, se $a \in W \ \wedge \ (\exists\, b \in W : a(t)\, b(t) = 1,$ para todo o $t \in \Gamma_0) \Longrightarrow a \in \mathcal{G}\,W$.

Seja $a \in \mathcal{G}\,W$. Então, $a \in W$ e $a^{-1} \in W$ existe. Seja $a^{-1} = b$, então temos $a \in W$ e $a(t)\, b(t) = a(t)\, a^{-1}(t) = a(t)\, \frac{1}{a(t)} = 1$. Concluímos então que se $a \in \mathcal{G}\,W \Longrightarrow a \in W \ \wedge \ (\exists\, b \in W : a(t)\, b(t) = 1,$ para todo o $t \in \Gamma_0)$.

Seja agora $a \in W$ tal que existe $b \in W$ e $a(t)\,b(t) = 1$. Como $a \neq 0$, pois $a(t)\,b(t) = 1$, então podemos escrever $b(t) = \frac{1}{a(t)}$, para todo o $t \in \Gamma_0$, ou seja $b(t) = a^{-1}(t)$.

Assim, $a^{-1}(t)$ existe e $a^{-1} \in W$, pois $b \in W$ e $a^{-1} = b$, donde vem que a é invertível e consequentemente $a \in \mathcal{G}W$. Provámos assim que $a \in W \ \wedge\ (\exists\, b \in W : a(t)\,b(t) = 1,$ para todo o $t \in \Gamma_0) \Longrightarrow a \in \mathcal{G}W$.

∎

O Teorema de Wiener permite afirmar que, a função $a \in \mathcal{G}W$ não pode ter zeros em Γ_0, pois se a tiver zeros não existe nenhum b que satisfaça a condição $a(t)b(t) = 1$.

O teorema seguinte diz-nos que a correspondente proposição em sentido contrário é também verdadeira.

Teorema 3.2 $\mathcal{G}W = \{a \in W : a(t) \neq 0\,,$ *para todo o* $t \in \Gamma_0\}$.

Demonstração. Para mostrar que $\mathcal{G}W = \{a \in W : a(t) \neq 0\,,$ para todo o $t \in \Gamma_0\}$ temos que mostrar que $\mathcal{G}W \subseteq \{a \in W : a(t) \neq 0\,,$ para todo o $t \in \Gamma_0\}$ e que $\{a \in W : a(t) \neq 0\,,$ para todo o $t \in \Gamma_0\} \subseteq \mathcal{G}W$. Comecemos então por mostrar a primeira inclusão.

Seja $a \in \mathcal{G}W$, então $a \in W$ e $\exists\, b \in W : a(t)\,b(t) = 1$, para todo o $t \in \Gamma_0$. De $a(t)\,b(t) = 1$ concluímos imediatamente que $a(t) \neq 0$. Temos, então, que $a \in W$ e $a(t) \neq 0$, logo $a \in \{a \in W : a(t) \neq 0\,,$ para todo o $t \in \Gamma_0\}$. Portanto,

$$\mathcal{G}W \subseteq \{a \in W : a(t) \neq 0\,, \text{ para todo o } t \in \Gamma_0\}. \tag{3.1}$$

Mostremos agora que $\{a \in W : a(t) \neq 0\,,$ para todo o $t \in \Gamma_0\} \subseteq \mathcal{G}W$. Seja $a \in \{a \in W : a(t) \neq 0\,,$ para todo o $t \in \Gamma_0\}$. Então, $a \in W$ e $a(t) \neq 0$ para todo o $t \in \Gamma_0$. Queremos mostrar que $a \in \mathcal{G}W$, ou seja que $a \in W$ e que $\exists\, b \in W : a(t)\,b(t) = 1,$ para todo o $t \in \Gamma_0$. Ora, por hipótese já temos que $a \in W$. Falta apenas mostrar que $\exists\, b \in W : a(t)\,b(t) = 1,$ para todo o $t \in \Gamma_0$.

Suponhamos, por absurdo, que $\forall\, b \in W,\quad \exists\, t \in \Gamma_0 : a(t)\,b(t) \neq 1$. Assim, podemos dizer que $a(t)\,b(t)$ pode ser nulo e portanto $a(t)$ pode ser zero, o que contraria a hipótese de $a \in \{a \in W : a(t) \neq 0\,,$ para todo o $t \in \Gamma_0\}$. Portanto, $\exists\, b \in W : a(t)\,b(t) = 1,$ para todo o $t \in \Gamma_0$. Assim temos que $a \in \mathcal{G}W$, logo

$$\{a \in W : a(t) \neq 0\,, \text{ para todo o } t \in \Gamma_0\} \subseteq \mathcal{G}W. \tag{3.2}$$

De (3.1) e de (3.2) concluímos finalmente que $\mathcal{G}W = \{a \in W : a(t) \neq 0\,,$ para todo o $t \in \Gamma_0\}$.

∎

3.1.2 Índice Topológico

Definição 3.1 *À colecção de todas as funções $a \in W$ que têm logaritmo em W; isto é, que são da forma*

$$a = e^b \qquad com \qquad b \in W$$

designamos por e^W.

Para caracterizarmos e^W é necessário conhecer a noção de índice topológico. Se $a : \Gamma_0 \longrightarrow \mathbb{C}\backslash\{0\}$ é uma função contínua, então $a(t)$ define uma curva fechada, contínua e orientada em $\mathbb{C}\backslash\{0\}$, quando t se move na circunferência unitária (à volta da origem), em sentido contrário ao dos ponteiros do relógio. O número de voltas dadas em torno da origem, no sentido contrário ao dos ponteiros do relógio, por tal curva fechada designamos por **índice topológico** de a e representamos por $wind\ a$.

Cada função a que não tem zeros em Γ_0 pode ser escrita na forma, $a = |a|\, e^{i\,c}$. Assim,

$$\begin{aligned} a(t) &= |a(t)|\, e^{i\,c(t)} \\ &= |a(e^{i\theta})|\, e^{ic(e^{i\theta})},\ \text{porque } e^{i\,\theta} \in \Gamma_0 \\ &= |a\,(e^{i\theta})|\, e^{i\,c(\theta)}, \quad \text{com } e^{i\theta} \in \Gamma_0 \ \text{ e } \ c(e^{i\theta}) = c(\theta), \end{aligned}$$

onde $c\ :\ [0\,,\,2\pi[\longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua. Designamos por $wind\, a$ o número inteiro, que é independente da escolha de c, calculado por

$$\frac{c(2\pi) - c(0)}{2\pi}.$$

Observemos que o teorema de Wiener apresenta $\mathcal{G}W$ como a intersecção de dois conjuntos. O primeiro é a álgebra de Wiener, W, e o segundo é um conjunto de funções que não têm zeros em Γ_0. Vamos denotar este último conjunto por $\mathcal{GC}$, assim o teorema de Wiener assume a forma seguinte:

$$\mathcal{G}W = W \cap \mathcal{GC}.$$

De seguida enunciamos um resultado clássico do qual iremos fazer uso nesta secção.

Teorema 3.3 *[15] Admitamos que para $c \in L^1(\mathbb{R})$, $1 - c(t) \neq 0$, para $-\infty < t < \infty$, e que $wind(1 - c(t)) = 0$. Então existe um $l \in L^1(\mathbb{R})$ tal que, para $-\infty < t < \infty$*

$$\ln(1 - c(t)) = \int_{-\infty}^{\infty} l(k) e^{i\,t\,k} dk.$$

$L^1(\mathbb{R})$ designa o espaço de Lebesgue em $\mathbb{R}$, onde cada $f \in L^1(\mathbb{R})$ satisfaz $\int_{\mathbb{R}} |f(x)|\, d\,x < \infty$.

Teorema 3.4 $e^W = \{a \in \mathcal{G}W \,:\, wind\ a = 0\}$.

Demonstração. Para mostrar o pretendido vamos mostrar que $e^W \subseteq \{a \in \mathcal{G}W \,:\, wind\ a = 0\}$ e que $\{a \in \mathcal{G}W \,:\, wind\ a = 0\} \subseteq e^W$. Comecemos por mostrar que $e^W \subseteq \{a \in \mathcal{G}W \,:\, wind\ a = 0\}$. Para tal, seja $a \in e^W$. Então $a \in W$ e $a = e^b$, para $b \in W$. Ora, de $a = e^b$ temos imediatamente que $a \neq 0$ e que

$$wind\, a = 0. \tag{3.3}$$

Assim, de $a \in W$ e $a \neq 0$ temos que

$$a \in \mathcal{G}W. \tag{3.4}$$

Logo, de (3.4) e de (3.3) vem que, $a \in \{a \in \mathcal{G}W \,:\, wind\ a = 0\}$, e portanto,

$$e^W \subseteq \{a \in \mathcal{G}W \,:\, wind\ a = 0\}. \tag{3.5}$$

Mostremos agora que $\{a \in \mathcal{G}W \,:\, wind\ a = 0\} \subseteq e^W$.

Seja $a \in \{a \in \mathcal{G}W \,:\, wind\ a = 0\}$. Assim temos $a \in \mathcal{G}W$ e $wind\ a = 0$. De $a \in \mathcal{G}W$, pelo Teorema 3.2, vem $a(t) \neq 0$, para todo o $t \in \Gamma_0$. De $a(t) \neq 0$, para todo o $t \in \Gamma_0$ e de $wind\ a = 0$ decorre do Teorema 3.3, por uso de uma bijecção que transforma $\mathbb{R}$ em Γ_0, que existe uma função $b \in W$ tal que para todo o $t \in \Gamma_0$,

$$\ln a(t) = \int_0^{2\pi} b_n(t) e^{i\,n\,t}\, dt.$$

E consequentemente, para todo o $t \in \Gamma_0$ vem:

$$a(t) = e^{\int_0^{2\pi} b_n(t) e^{i\,n\,t}\, dt},$$

ou seja,

$$a(t) = e^{b(t)},$$

com $b(t) \in W$. Temos então que, $a \in e^W$, logo

$$\{a \in \mathcal{G}W : wind\ a = 0\} \subseteq e^W. \tag{3.6}$$

De (3.5) e de (3.6) concluímos finalmente que $e^W = \{a \in \mathcal{G}W \,:\, wind\ a = 0\}$.

■

3.1.3 Funções analíticas de Wiener

Ao longo desta secção teremos como objectivo construir uma factorização de Wiener-Hopf para funções que estejam definidas na álgebra de Wiener.

Sejam $\mathcal{G}\,W_+$ o conjunto das funções $a_+ \in W_+$ para as quais existe $b_+ \in W_+$ tal que

$$a_+(t)\,b_+(t) = 1 \quad \text{para todo o} \quad t \in \Gamma_0,$$

e e^{W_+} o conjunto de todas as funções $a_+ \in \mathcal{G}\,W_+$ que podem ser representadas na forma

$$a_+ = e^{b_+}, \quad \textit{com} \quad b_+ \in W_+.$$

Analogamente, $\mathcal{G}\,W_-$ representa o conjunto das funções $a_- \in W_-$ para as quais existe $b_- \in W_-$ tal que

$$a_-(t)\,b_-(t) = 1 \quad \text{para todo o } t \in \Gamma_0,$$

e e^{W_-} designa o conjunto de todas as funções $a_- \in \mathcal{G}\,W_-$ que podem ser escritas na forma

$$a_- = e^{b_-}, \quad \textit{com} \quad b_- \in W_-.$$

Seja $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : \ |z| < 1\}$ o círculo unitário aberto. Cada função $a_+ \in W_+$ pode ser estendida a uma função analítica em $\mathbb{D}$ pela fórmula

$$a_+(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, z^n \quad (z \in \mathbb{D}),$$

onde $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ é a sucessão dos coeficientes de Fourier de a. De modo análogo, cada função $a_- \in W_-$ admite uma extensão analítica ao conjunto $\{z \in \mathbb{C} : \ |z| > 1\} \cup \{\infty\}$ através da fórmula

$$a_-(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{-n}\, z^{-n} \quad (1 < \ |z| \ \leq \infty).$$

Teorema 3.5 *Tem-se*

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}\,W_+ &= \{a \in W \ : \ a(z) \neq 0, \quad \textit{para todo} \quad |z| < 1\} \\
\mathcal{G}\,W_- &= \{a \in W \ : \ a(z) \neq 0, \quad \textit{para todo} \quad |z| > 1 \quad e \quad z = \infty\} \\
e^{W_+} &= \mathcal{G}\,W_+ \\
e^{W_-} &= \mathcal{G}\,W_-.
\end{aligned}$$

Demonstração. Comecemos por mostrar que

$$\mathcal{G}W_+ = \{a \in W \ : \ a(z) \neq 0, \quad \text{para todo} \quad |z| < 1\}.$$

Para tal vamos mostrar que $\mathcal{G}W_+ \subseteq \{a \in W \ : \ a(z) \neq 0, \quad \text{para todo} \quad |z| < 1\}$ e que $\{a \in W \ : \ a(z) \neq 0, \quad \text{para todo} \quad |z| < 1\} \subseteq \mathcal{G}W_+$. Seja $a \in \mathcal{G}W_+$. Como $\mathcal{G}W_+ = W_+ \cap \mathcal{G}W$, então $a \in W_+$ e $a \in \mathcal{G}W$. Se $a \in W_+$ então a pode ser estendida a uma função analítica em $\mathbb{D}$ pela fórmula

$$a_+(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \ \text{com } |z| < 1. \tag{3.7}$$

Assim, de $a \in \mathcal{G}W$ vem, $a \in W$ e $a(z) \neq 0$, para todo o $|z| < 1$, pelo Teorema 3.2 e por (3.7).

Seja

$$a \in \{a \in W \ : \ a(z) \neq 0, \ \text{para todo } |z| < 1\}.$$

Queremos mostrar que $a \in \mathcal{G}W_+$, ou seja que $a \in \mathcal{G}W$ e que $a \in W_+$. Ora de $a \in W$ e $a(z) \neq 0$ vem $a \in \mathcal{G}W$, pelo Teorema 3.2, e de $|z| < 1$ vem que $a \in W_+$, logo $a \in \mathcal{G}W_+$.

Analogamente vamos mostrar que

$$\mathcal{G}W_- = \{a \in W \ : \ a(z) \neq 0, \ \text{para todo } |z| > 1 \text{ e } z = \infty\}.$$

Comecemos por mostrar que

$$\mathcal{G}W_- \subseteq \{a \in W \ : \ a(z) \neq 0, \ \text{para todo } |z| > 1 \text{ e } z = \infty\}.$$

Seja $a \in \mathcal{G}W_-$. Então $a \in \mathcal{G}W$, isto é, $a \in W$ e $a(z) \neq 0$ para todo o $t \in \Gamma_0$, pelo Teorema 3.2. Mas, uma vez que $a \in W_-$ então a admite uma extensão analítica ao conjunto $\{z \in \mathbb{C} : |z| > 1 \cup \{\infty\}\}$, e portanto $a \in W$ e $a(z) \neq 0$, para todo o $|z| > 1 \cup \{\infty\}$. Logo,

$$a \in \{a \in W \ : \ a(z) \neq 0, \ \text{para todo } |z| > 1 \text{ e } z = \infty\},$$

donde

$$\mathcal{G}W_- \subseteq \{a \in W \ : \ a(z) \neq 0, \ \text{para todo } |z| > 1 \, \text{e} \, z = \infty\}. \tag{3.8}$$

Reciprocamente, seja

$$a \in \{a \in W \ : \ a(z) \neq 0 \ \text{para todo } |z| > 1 \text{ e } z = \infty\}.$$

Então $a \in W$ e $a(z) \neq 0$, para todo o $|z| > 1$ e $z = \infty$. Ora de $|z| > 1$ e $z = \infty$ vem imediatamente que $a \in W_-$. Por outro lado, de $a \in W$ e $a(z) \neq 0$ vem que $a \in \mathcal{G}W$, pelo Teorema 3.2. Assim temos que $a \in \mathcal{G}W$ e que $a \in W_-$, então $a \in \mathcal{G}W_-$. Logo

$$\{a \in W \ : \ a(z) \neq 0 \ \text{para todo } |z| > 1 \ e \ z = \infty\} \subseteq \mathcal{G}W_-. \tag{3.9}$$

De (3.8) e de (3.9) concluímos que

$$\mathcal{G}\,W_- = \{a \in W \,:\, a(z) \neq 0 \text{ para todo } |z| > 1 \text{ e } z = \infty\}.$$

Por definição de $e^{W_\pm}$ decorre imediatamente que $e^{W_+} = \mathcal{G}\,W_+$ e que $e^{W_-} = \mathcal{G}\,W_-$.

■

Teorema 3.6 (Teorema da Factorização de Wiener-Hopf) *Seja $a \in W$. Suponhamos que $a(t) \neq 0$, para todo o $t \in \Gamma_0$ e que wind $a = m$. Então a pode ser escrito na forma*

$$a(t) \;=\; a_-(t)\, t^m\, a_+(t),\;\; t \in \Gamma_0$$

com $a_\pm \in \mathcal{G}\,W_\pm$.

Demonstração. Temos, por (2.17) que $\chi_m(t) = t^m$ e por (2.2) que $a\,(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n t^n$. Por outro lado, dado que $wind(f\,g) = wind(f) + wind(g)$ [6] temos,

$$\begin{aligned} wind\,(a\,\chi_{-m}) \;&=\; wind\ a \,+\, wind\,\chi_{-m} \\ &=\; m - m, \text{ pois por hipótese } wind\ a = m \text{ e como podemos ler em [5]} \\ &\qquad wind\ \chi_m = m \\ &=\; 0. \end{aligned}$$

De $a \in W$ e $a(t) \neq 0$ vem, pelo Teorema 3.2, que $a \in \mathcal{G}\,W$. Novamente, pelo Teorema 3.2 temos $\chi_{-m} \in \mathcal{G}\,W$, pois $\chi_{-m} \in W$ e $\chi_{-m} = t^{-m} \neq 0$ (uma vez que $t \in \Gamma_0$). Assim, $a\chi_{-m} \in \mathcal{G}\,W$. Então pelo Teorema 3.4, e atendendo a que $a\,\chi_{-m} \in \mathcal{G}W$ e $wind(a\,\chi_{-m}) = 0$, temos que $a\,\chi_{-m} \in e^W$. Atendendo à definição de e^W vem

$$a\,\chi_{-m} = e^b, \quad \text{onde} \quad b \in W.$$

Assim, se $b \in W$ então b é da forma

$$b(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n\, t^n \qquad (t \in \Gamma_0),$$

donde se pode escolher

$$b_-(t) = \sum_{n=-\infty}^{-1} b_n\, t^n \qquad \text{e} \qquad b_+(t) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n\, t^n\,.$$

Assim, podemos escrever e^b na forma $e^b = e^{b_- + b_+} = e^{b_-} e^{b_+}$, com $e^{b_\pm} \in \mathcal{G}W_\pm$, pelo teorema anterior e atendendo à definição de e^{W_+} e e^{W_-}.

Temos então $b = b_- + b_+$, e considerando $a_- := e^{b_-}$ e $a_+ := e^{b_+}$, obtém-se

$$a\chi_{-m} = a_- \, a_+$$

e finalmente,

$$a(t) = a_-(t)\,\chi_m(t)\,a_+(t) \qquad \text{ou ainda} \qquad a(t) = a_-(t)\,t^m\,a_+(t)\,,\ t \in \Gamma_0 \quad .$$

■

Podemos encontrar outra demonstração para este teorema em [5, Teorema 1.14].

3.2 Factorização em álgebras de Banach

Como podemos ler em [11] o estudo da factorização de matrizes de funções teve início em 1908 com um trabalho de J. Plemelj. Este estudo foi aprofundado por outros autores tais como N. I. Muskhelishvili, N. P. Vekua e Grothendieck, entre outros.

De seguida vamos debruçarmo-nos um pouco sobre a factorização, em álgebras de Banach, de matrizes de funções definidas numa curva.

Uma álgebra de Banach decomponível $\mathcal{A}$ é uma álgebra de Banach que possui elemento identidade e que pode ser escrita numa soma directa de duas subálgebras fechadas:

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_- \oplus \mathcal{A}_+.$$

Assim, um elemento $a \in \mathcal{A}$ pode ser escrito na forma $a = a_- + a_+$, com $a_- \in \mathcal{A}_-$ e $a_+ \in \mathcal{A}_+$.

Vamos denotar por $P_{\mathcal{A}_+}$ e por $P_{\mathcal{A}_-}$ o projector que transforma o elemento a no elemento a_+ e a_-, respectivamente. Mais, dizemos que os operadores $P_{\mathcal{A}_+}$ e $P_{\mathcal{A}_-}$ são projectores lineares limitados em $\mathcal{A}$ se as subálgebras $\mathcal{A}_+$ e $\mathcal{A}_-$ são fechadas; e neste caso, $P_{\mathcal{A}_+} = I - P_{\mathcal{A}_-}$, onde I representa o operador identidade.

Representemos o conjunto de todas as matrizes $[a_{ij}]_{i,j=1}^n$, $n \times n$, com entradas numa álgebra de Banach decomponível, $\mathcal{A}$, por $\mathcal{A}^{n\times n}$.

Vamos munir a álgebra $\mathcal{A}^{n\times n}$ com as operações usuais de matrizes e com a norma,

$$\|[a_{ij}]_{i,j=1}^n\| = \max_{1\le i\le n} \sum_{j=1}^{n} \|a_{ij}\|.$$

Nestas condições, a álgebra $\mathcal{A}^{n\times n}$ admite a decomposição $\mathcal{A}^{n\times n} = \mathcal{A}_-^{n\times n} \oplus \mathcal{A}_+^{n\times n}$, onde $\mathcal{A}_-^{n\times n} = \{[a_{ij}]_{i,j=1}^n : a_{ij} \in \mathcal{A}_-\}$ e $\mathcal{A}_+^{n\times n} = \{[a_{ij}]_{i,j=1}^n : a_{ij} \in \mathcal{A}_+\}$.

A unidade da álgebra $\mathcal{A}^{n\times n}$ é a matriz quadrada, $n \times n$, I, que apresenta na diagonal principal a unidade e zeros em tudo o resto.

Exemplo 3.1 *Álgebra de Wiener na circunferência unitária*

Atendendo à definição 2.12, podemos afirmar que:

$$f \in W \Longleftrightarrow \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k\, \lambda^k,\ \lambda \in \Gamma_0 \quad e\ \|f\|_W = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |f_k| < \infty$$

e que os elementos da álgebra de Wiener são funções contínuas.

Podemos dizer que W é uma álgebra de Banach decomponível, porque a função $f \in W$ pode ser escrita na forma $f_+ = \sum_{k=0}^{\infty} f_k\, \lambda^k,\ \lambda \in \Gamma_0$ e $f_- = \sum_{k=-\infty}^{-1} f_k\, \lambda^k,\ \lambda \in \Gamma_0$. Considerando,

$$\begin{aligned} W_+ &= \{f \in W(\Gamma_0) :\ f_k = 0, \quad \textit{para todo o } k < 0\} \\ W_{-,0} &= \{f \in W(\Gamma_0) :\ f_k = 0, \quad \textit{para todo o } k \geq 0\} \end{aligned}$$

onde f_k designa o k-ésimo coeficiente de Fourier de f, temos

$$W = W_{-,0} \oplus W_+.$$

Exemplo 3.2 *Álgebra de Wiener na recta real*

Representemos por $W(\mathbb{R})$ o conjunto de todas as funções de valores complexos com domínio em $\mathbb{R}$ que admitem a seguinte representação:

$$f(\lambda) = d + \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} k(t)\ dt,\ \lambda \in \mathbb{R},$$

onde d é um número complexo arbitrário e k é uma função integrável de Lebesgue em $\mathbb{R}$ ($k \in L^1(\mathbb{R})$). As funções de $W(\mathbb{R})$ são contínuas em $\mathbb{R}$ e

$$\|f\|_W = |d| + \int_{-\infty}^{\infty} |k(t)|\ dt.$$

$W(\mathbb{R})$ é uma álgebra decomponível, pois cada função f pode ser escrita na forma $f_+ = d + \int_1^{\infty} e^{i\lambda t} k(t)\ dt,\ \lambda \in \mathbb{R}$ e $f_- = \int_{-\infty}^{0} e^{i\lambda t} k(t)\ dt,\ \lambda \in \mathbb{R}$.

Ou seja, a álgebra de Banach $W(\mathbb{R})$ admite a decomposição,

$$W(\mathbb{R}) = W_{-,0}(\mathbb{R}) \oplus W_+(\mathbb{R}),$$

onde $W_+(\mathbb{R}) = \{f \in W(\mathbb{R}) :\ k(t) = 0,\ -\infty < t < 0\}$ e $W_{-,0}(\mathbb{R}) = \{f \in W(\mathbb{R}) :\ d = 0$ e $k(t) = 0,\ 0 < t < \infty\}$ são duas subálgebras fechadas.

Analisemos agora, um pouco, o caso de álgebras de matrizes de funções em Γ_0 e em $\mathbb{R}$.

Sejam $W^{n\times n}$ e $W^{n\times n}(\mathbb{R})$ álgebras de Banach de todas as matrizes quadradas $n\times n$ com entradas em W e em $W(\mathbb{R})$, respectivamente.

Seja $F(\lambda)=[f_{ij}(\lambda)]_{i,j=1}^{n}$. F é um elemento de $W^{n\times n}$ se e só se

$$F(\lambda)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} F_k\,\lambda^k, \quad \lambda\in\Gamma_0,$$

onde os coeficientes F_k designam as matrizes $n\times n$ tais que $\sum_{k=-\infty}^{\infty}\|F_k\|$ são convergentes.

Analogamente,

$$F\in W^{n\times n}(\mathbb{R}) \Longleftrightarrow F(\lambda)=D+\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t}\,K(t)\;dt,\;\; \lambda\in\mathbb{R},$$

onde D é uma matriz $n\times n$ arbitrária e K é uma matriz, $n\times n$, de funções cujas entradas são funções integráveis de Lebesgue em $\mathbb{R}$.

As normas em $W^{n\times n}$ e em $W^{n\times n}(\mathbb{R})$ são dadas por:

$$\begin{aligned}\|F\|_W &= \sum_{k=-\infty}^{\infty}\|F_k\|, \quad \text{para } F(\lambda)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}F_k\,\lambda^k\\ \|F\|_W &= \|D\|+\int_{-\infty}^{\infty}\|K(t)\|\;dt, \quad \text{para } F(\lambda)=D+\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\lambda t}K(t)\,dt,\;\; \lambda\in\mathbb{R},\end{aligned}$$

respectivamente.

3.2.1 Factorização em álgebras abstractas decomponíveis

Como já definimos anteriormente, uma álgebra de Banach pode apresentar a seguinte decomposição:

$$\mathcal{A}=\mathcal{A}_-\oplus\mathcal{A}_+.$$

Seja $b\in\mathcal{A}$. Dizemos que o elemento b admite uma **factorização canónica à direita** se

$$b=(e+a_-)(e+a_+), \tag{3.10}$$

onde e é o elemento identidade, $e+a_-$ e $e+a_+$ são invertíveis, $a_-\in\mathcal{A}_-$, $a_+\in\mathcal{A}_+$ e $(e+a_\pm)^{-1}-e\in\mathcal{A}_\pm$. Por conveniência escrevemos os elementos $b\in\mathcal{A}$ na forma $b=e-a$.

É então claro que se b admitir uma factorização canónica à direita então b é invertível mas o recíproco não é verdadeiro.

Uma factorização canónica quando existe é única.

Para mostrarmos que ela é única, suponhamos, por absurdo, que existe outra. Isto é, para além de (3.10) b admite a factorização $b = (e+c_-)(e+c_+)$. Ora, $e+c_\pm$ são invertíveis, $c_\pm \in \mathcal{A}_\pm$ e $(e+c_\pm)^{-1} - e \in \mathcal{A}_\pm$.

Consideremos,

$$\begin{cases} a_+^* = (e+a_+)^{-1} - e \\ c_-^* = (e+c_-)^{-1} - e \end{cases} .$$

Assim, as seguintes identidades são equivalentes:

$$\begin{aligned}
b &= (e+a_-)(e+a_+) \\
(e+c_-)(e+c_+) &= (e+a_-)(e+a_+) \\
\underbrace{(e+c_-)^{-1}(e+c_-)}_{e}(e+c_+) &= (e+c_-)^{-1}(e+a_-)(e+a_+) \\
(e+c_+) &= (e+c_-)^{-1}(e+a_-)(e+a_+) \\
(e+c_+)(e+a_+)^{-1} &= (e+c_-)^{-1}(e+a_-)\underbrace{(e+a_+)(e+a_+)^{-1}}_{e} \\
(e+c_+)(e+a_+)^{-1} &= (e+c_-)^{-1}(e+a_-) \\
(e+c_+)(e+a_+^*) &= (e+c_-^*)(e+a_-), \text{ porque } a_+^* = (e+a_+)^{-1} - e \\
& \qquad\qquad\qquad\qquad \text{e } c_-^* = (e+c_-)^{-1} - e.
\end{aligned}$$

Temos então,

$$(e+c_+)(e+a_+^*) = (e+c_-^*)(e+a_-)$$

ou ainda,

$$\begin{aligned}
e + ea_+^* + c_+e + c_+a_+^* &= e + ea_- + c_-^*e + c_-^*a_- \\
\Longleftrightarrow \underbrace{a_+^* + c_+ + c_+a_+^*}_{\in\mathcal{A}_+} &= \underbrace{a_- + c_-^* + c_-^*a_-}_{\in\mathcal{A}_-}.
\end{aligned}$$

Ora, temos um elemento de $\mathcal{A}_+$ igual a um elemento de $\mathcal{A}_-$, e portanto tal elemento só pode pertencer a $\mathcal{A}_- \cap \mathcal{A}_+ = \{0\}$. Donde,

$$\begin{cases} a_+^* + c_+ + c_+a_+^* = 0 \\ a_- + c_-^* + c_-^*a_- = 0 \end{cases} .$$

Mas como

$$a_+^* + c_+ + c_+a_+^* = (e+c_+)(e+a_+^*)$$

e

$$(e+c_-^*)(e+a_-) = a_- + c_-^* + c_-^*a_-.$$

Então,

$$\begin{cases} (e+c_+)(e+a_+^*) = e \\ (e+c_-^*)(e+a_-) = e \end{cases}.$$

Concluímos portanto que,

$$(e+c_+)(e+a_+^*)(e+a_+^*)^{-1} = e(e+a_+^*)^{-1}$$

ou ainda que,

$$(e+c_+) = (e+a_+^*)^{-1}. \tag{3.11}$$

Por outro lado,

$$(e+c_-^*)^{-1}(e+c_-^*)(e+a_-) = (e+c_-^*)^{-1}e$$

ou,

$$(e+a_-) = (e+c_-^*)^{-1}. \tag{3.12}$$

Mas, as identidades seguintes são equivalentes:

$$\begin{aligned} a_+^* &= (e+a_+)^{-1} - e \qquad (3.13)\\ e+a_+^* &= (e+a_+)^{-1} \\ (e+a_+^*)(e+a_+) &= (e+a_+)^{-1}(e+a_+) \\ (e+a_+^*)(e+a_+) &= e \\ (e+a_+^*)^{-1}(e+a_+^*)(e+a_+) &= (e+a_+^*)^{-1}e \\ (e+a_+) &= (e+a_+^*)^{-1} \end{aligned}$$

assim como:

$$\begin{aligned} c_-^* &= (e+c_-)^{-1} - e \qquad (3.14)\\ e+c_-^* &= (e+c_-)^{-1} \\ (e+c_-^*)(e+c_-) &= (e+c_-)^{-1}(e+c_-) \\ (e+c_-^*)(e+c_-) &= e \\ (e+c_-^*)^{-1}(e+c_-^*)(e+c_-) &= (e+c_-^*)^{-1}e \\ (e+c_-) &= (e+c_-^*)^{-1}. \end{aligned}$$

De (3.11) e da última identidade de (3.13) vem,

$$e+c_+ = (e+a_+^*)^{-1} = e+a_+$$

e de (3.12) e da última identidade de (3.14) vem,

$$e + a_- = (e + c_-^*)^{-1} = e + c_-.$$

Logo,

$$c_+ = a_+ \quad \text{e} \quad a_- = c_-.$$

E portanto as duas factorizações de b coincidem. Podemos então afirmar que quando b admite uma factorização canónica ela é única.

O problema da factorização não é um problema linear. Contudo, podemos reduzir este problema à resolução de equações lineares, mas para isso é necessário apresentarmos os seguintes resultados:

Teorema 3.7 *Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra de Banach decomponível ($\mathcal{A} = \mathcal{A}_- \oplus \mathcal{A}_+$) cujos elementos que têm inversos em $\mathcal{A}$ são invertíveis. Nestas condições, as afirmações seguintes são equivalentes:*

Para $a \in \mathcal{A}$,

1. *O elemento $b = e - a$ admite uma factorização canónica.*

2. *As equações*
$$\begin{cases} x - P_{\mathcal{A}_+}(a\,x) = e \\ y - P_{\mathcal{A}_-}(y\,a) = e \end{cases}$$
têm solução em $\mathcal{A}$.

3. *Para $f, g \in \mathcal{A}$ as equações:*
$$\begin{cases} f = x - P_{\mathcal{A}_+}(a\,x) \\ g = y - P_{\mathcal{A}_-}(y\,a) \end{cases}$$
têm uma única solução em $\mathcal{A}$.

Demonstração. Para mostrar que as afirmações são equivalentes vamos provar que $1 \implies 3$, $3 \implies 2$ e que $2 \implies 1$. Comecemos, então por mostrar que $1 \implies 3$. Assim, por hipótese temos que $\mathcal{A} = \mathcal{A}_- \oplus \mathcal{A}_+$ e que $b = e - a$ admite uma factorização canónica. Suponhamos que essa factorização canónica é da forma, $b = e - a = (e + a_-)(e + a_+)$. Pretendemos mostrar que a equação $x - P_{\mathcal{A}_+}(a\,x) = f$ tem uma única solução em $\mathcal{A}$. Para tal vamos considerar nesta equação $x = f + z_+$ (com $z_+ \in \mathcal{A}_+$) e daí deduzir as seguintes identidades:

$$\begin{aligned}
f + z_+ - P_{\mathcal{A}_+}(a\,(f + z_+)) &= f \\
f + z_+ - P_{\mathcal{A}_+}(a\,f) - P_{\mathcal{A}_+}(a\,z_+) &= f, \text{ porque } P_{\mathcal{A}_+} \text{ é um operador linear} \\
z_+ - P_{\mathcal{A}_+}(a\,z_+) &= P_{\mathcal{A}_+}(a\,f) \\
z_+ - (I(a\,z_+) - P_{\mathcal{A}_-}(a\,z_+)) &= P_{\mathcal{A}_+}(a\,f), \text{ porque } P_{\mathcal{A}_+} = I - P_{\mathcal{A}_-} \\
z_+ - a\,z_+ + P_{\mathcal{A}_-}(a\,z_+) &= P_{\mathcal{A}_+}(a\,f) \\
(e-a)z_+ + \underbrace{P_{\mathcal{A}_-}(a\,z_+)}_{z_- \in \mathcal{A}_-} &= P_{\mathcal{A}_+}(a\,f) \\
(e-a)z_+ + z_- &= P_{\mathcal{A}_+}(a\,f) \\
(e+a_-)(e+a_+)z_+ + z_- &= P_{\mathcal{A}_+}(a\,f), \text{ pois } e - a = (e+a_-)(e+a_+) \\
(e+a_+)z_+ + (e+a_-)^{-1}z_- &= (e+a_-)^{-1}P_{\mathcal{A}_+}(a\,f), \text{ pois } e + a_- \text{ é invertível} \\
P_{\mathcal{A}_+}(e+a_+)z_+ + 0 &= P_{\mathcal{A}_+}[(e+a_-)^{-1}P_{\mathcal{A}_+}(a\,f)], \text{ porque a projecção} \\
&\quad \text{de um elemento de } \mathcal{A}_- \text{ sobre } \mathcal{A}_+ \text{ é zero} \\
(e+a_+)z_+ &= P_{\mathcal{A}_+}[(e+a_-)^{-1}P_{\mathcal{A}_+}(a\,f)], \text{ porque a projecção} \\
&\quad \text{de um elemento de } \mathcal{A}_+ \text{ sobre } \mathcal{A}_+ \text{ é o próprio} \\
&\quad \text{elemento} \\
z_+ &= (e+a_+)^{-1}P_{\mathcal{A}_+}[(e+a_-)^{-1}P_{\mathcal{A}_+}(a\,f)], \text{ pois } (e+a_+) \\
&\quad \text{é invertível} \\
x - f &= (e+a_+)^{-1}P_{\mathcal{A}_+}[(e+a_-)^{-1}P_{\mathcal{A}_+}(a\,f)], \text{ porque} \\
&\quad x = f + z_+ \\
x &= f + (e+a_+)^{-1}P_{\mathcal{A}_+}[(e+a_-)^{-1}P_{\mathcal{A}_+}(a\,f)]. \qquad (3.15)
\end{aligned}$$

Reciprocamente, seja $f \in \mathcal{A}$, qualquer, e $x = f + (e+a_+)^{-1}P_{\mathcal{A}_+}[(e+a_-)^{-1}P_{\mathcal{A}_+}(a\,f)]$. Esta última igualdade pode assumir a forma,

$$x - f = \underbrace{(e+a_+)^{-1}P_{\mathcal{A}_+}[(e+a_-)^{-1}P_{\mathcal{A}_+}(a\,f)]}_{:=v_+}$$

ou seja,

$$v_+ = x - f \in \mathcal{A}_+.$$

Donde, as identidades seguintes são equivalentes:

$$\begin{aligned}
v_+ &= (e+a_+)^{-1}[I((e+a_-)^{-1}P_{\mathcal{A}_+}(a\,f)) - P_{\mathcal{A}_-}[(e+a_-)^{-1}P_{\mathcal{A}_+}(a\,f)]], \\
&\quad \text{porque } P_{\mathcal{A}_+} = I - P_{\mathcal{A}_-} \\
v_+ &= (e+a_+)^{-1}[(e+a_-)^{-1}P_{\mathcal{A}_+}(a\,f)] - (e+a_+)^{-1}P_{\mathcal{A}_-}[(e+a_-)^{-1} \\
&\quad P_{\mathcal{A}_+}(a\,f)] \\
(e+a_+)v_+ &= (e+a_-)^{-1}P_{\mathcal{A}_+}(a\,f) - P_{\mathcal{A}_-}[(e+a_-)^{-1}P_{\mathcal{A}_+}(a\,f)],\ \text{porque} \\
&\quad (e+a_+)^{-1} \text{ é invertível} \\
(e+a_-)(e+a_+)v_+ &= P_{\mathcal{A}_+}(a\,f) - (e+a_-)P_{\mathcal{A}_-}[(e+a_-)^{-1}P_{\mathcal{A}_+}(a\,f)],\ \text{porque } (e+a_-)^{-1} \\
&\quad \text{é invertível} \\
(e-a)v_+ &= P_{\mathcal{A}_+}(a\,f) - \underbrace{(e+a_-)P_{\mathcal{A}_-}[(e+a_-)^{-1}P_{\mathcal{A}_+}(a\,f)]}_{v_-\in\mathcal{A}_-},\ \text{pois} \\
&\quad e-a = (e+a_-)(e+a_+) \\
(e-a)v_+ + v_- &= P_{\mathcal{A}_+}(a\,f) \\
v_+ - av_+ + v_- &= P_{\mathcal{A}_+}(a\,f).
\end{aligned}$$

Projectando esta última igualdade sobre $\mathcal{A}_+$ temos,

$$v_+ - P_{\mathcal{A}_+}(a\,v_+) = P_{\mathcal{A}_+}(a\,f),$$

porque $P_{\mathcal{A}_+}(v_+) = v_+$ e $P_{\mathcal{A}_+}(v_-) = 0$. Consideremos $v_+ = x - f$. Então as identidades seguintes são equivalentes:

$$\begin{aligned}
x - f - P_{\mathcal{A}_+}(a\,x - a\,f) &= P_{\mathcal{A}_+}(a\,f) \\
x - f - P_{\mathcal{A}_+}(a\,x) + P_{\mathcal{A}_+}(a\,f) &= P_{\mathcal{A}_+}(a\,f) \\
x - P_{\mathcal{A}_+}(a\,x) &= f.
\end{aligned}$$

Para mostrar a unicidade vamos admitir que a equação $f = x - P_{\mathcal{A}_+}(a\,x)$, para $f \in \mathcal{A}$ tem duas soluções, x_1 e x_2. Assim temos, $f = x_1 - P_{\mathcal{A}_+}(a\,x_1)$ e $f = x_2 - P_{\mathcal{A}_+}(a\,x_2)$. As identidades que se seguem são equivalentes:

$$\begin{aligned}
x_1 - P_{\mathcal{A}_+}(a\,x_1) &= x_2 - P_{\mathcal{A}_+}(a\,x_2) \\
x_1 - x_2 - P_{\mathcal{A}_+}(a\,x_1) + P_{\mathcal{A}_+}(a\,x_2) &= 0 \\
x_1 - x_2 - P_{\mathcal{A}_+}(a\,x_1 - a\,x_2) &= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x_1 - x_2 - P_{\mathcal{A}_+}(a(x_1-x_2)) &= 0 \\
\varphi - P_{\mathcal{A}_+}(a\,\varphi) &= 0, \text{ com } \varphi = x_1 - x_2.
\end{aligned}$$

Então, atendendo a (3.15), $\varphi = 0$, isto é, $x_1 = x_2$. Concluímos então que a equação $f = x - P_{\mathcal{A}_+}(a\,x)$, para $f \in \mathcal{A}$ admite uma única solução.

Analogamente, vamos provar que a equação $y - P_{\mathcal{A}_-}(y\,a) = g$ admite uma única solução em $\mathcal{A}$, quando $e-a$ admite uma factorização canónica.

Vamos considerar $y = g + w_-$, com $w_- \in \mathcal{A}_-$. Assim da equação $y - P_{\mathcal{A}_-}(y\,a) = g$ decorrem as seguintes identidades:

$$\begin{aligned}
g + w_- - P_{\mathcal{A}_-}(g\,a + w_-\,a) &= g \\
g + w_- - P_{\mathcal{A}_-}(g\,a) - P_{\mathcal{A}_-}(w_-\,a) &= g \\
w_- - P_{\mathcal{A}_-}(w_-\,a) &= P_{\mathcal{A}_-}(g\,a) \\
w_- - (I(w_-\,a) - P_{\mathcal{A}_+}(w_-\,a)) &= P_{\mathcal{A}_-}(g\,a), \text{ pois } P_{\mathcal{A}_-} = I - P_{\mathcal{A}_+} \\
w_- - w_-\,a + P_{\mathcal{A}_+}(w_-\,a) &= P_{\mathcal{A}_-}(g\,a) \\
(e-a)w_- + \underbrace{P_{\mathcal{A}_+}(w_-\,a)}_{w_+ \in \mathcal{A}_+} &= P_{\mathcal{A}_-}(g\,a) \\
(e-a)w_- + w_+ &= P_{\mathcal{A}_-}(g\,a) \\
(e+a_-)(e+a_+)w_- + w_+ &= P_{\mathcal{A}_-}(g\,a), \text{ pois } b = e - a = (e+a_-)(e+a_+) \\
(e+a_-)w_- + (e+a_+)^{-1}w_+ &= (e+a_+)^{-1}P_{\mathcal{A}_-}(g\,a), \text{ pois } (e+a_+) \text{ é invertível} \\
(e+a_-)w_- &= P_{\mathcal{A}_-}[(e+a_+)^{-1}P_{\mathcal{A}_-}(g\,a)], \text{ porque a projecção de} \\
& \text{ um elemento de } \mathcal{A}_+ \text{ sobre } \mathcal{A}_- \text{ é zero e a projecção de} \\
& \text{ um elemento de } \mathcal{A}_- \text{ sobre } \mathcal{A}_- \text{ é o próprio elemento} \\
w_- &= (e+a_-)^{-1}P_{\mathcal{A}_-}[(e+a_+)^{-1}P_{\mathcal{A}_-}(g\,a)] \text{ porque } (e+a_-) \\
& \text{ é invertível} \\
y &= g + (e+a_-)^{-1}P_{\mathcal{A}_-}[(e+a_+)^{-1}P_{\mathcal{A}_-}(g\,a)].
\end{aligned}$$

Reciprocamente, seja $g \in \mathcal{A}$ e $y = g + (e+a_-)^{-1}P_{\mathcal{A}_-}[(e+a_+)^{-1}P_{\mathcal{A}_-}(g\,a)]$. Donde,

$$y - g = \underbrace{(e+a_-)^{-1}P_{\mathcal{A}_-}[(e+a_+)^{-1}P_{\mathcal{A}_-}(g\,a)]}_{:=s_- \in \mathcal{A}_-},$$

e assim as identidades seguintes são equivalentes:

$$
\begin{aligned}
s_- &= (e+a_-)^{-1}P_{\mathcal{A}_-}[(e+a_+)^{-1}P_{\mathcal{A}_-}(g\,a)] \\
(e+a_-)s_- &= P_{\mathcal{A}_-}[(e+a_+)^{-1}P_{\mathcal{A}_-}(g\,a)] \\
(e+a_-)s_- &= I[(e+a_+)^{-1}P_{\mathcal{A}_-}(g\,a)] - P_{\mathcal{A}_+}[(e+a_+)^{-1} \\
&\quad P_{\mathcal{A}_-}(g\,a)], \text{pois } P_{\mathcal{A}_-} = I - P_{\mathcal{A}_+} \\
(e+a_-)s_- &= (e+a_+)^{-1}P_{\mathcal{A}_-}(g\,a) - P_{\mathcal{A}_+}[(e+a_+)^{-1} \\
&\quad P_{\mathcal{A}_-}(g\,a)] \\
(e+a_+)(e+a_-)s_- &= P_{\mathcal{A}_-}(g\,a) - (e+a_+)P_{\mathcal{A}_+}[(e+a_-)^{-1} \\
&\quad P_{\mathcal{A}_-}(g\,a)], \text{porque } (e+a_-)^{-1} \text{ tem inverso} \\
(e-a)s_- + \underbrace{(e+a_+)P_{\mathcal{A}_+}[(e+a_-)^{-1}P_{\mathcal{A}_-}(g\,a)]}_{s_+\in\mathcal{A}_+} &= P_{\mathcal{A}_-}(g\,a) \\
(e-a)s_- + s_+ &= P_{\mathcal{A}_-}(g\,a) \\
s_- - as_- + s_+ &= P_{\mathcal{A}_-}(g\,a).
\end{aligned}
$$

Projectando sob a subálgebra $\mathcal{A}_-$ obtemos, $P_{\mathcal{A}_-}s_- - P_{\mathcal{A}_-}(a\,s_-) = P_{\mathcal{A}_-}[P_{\mathcal{A}_-}(g\,a)]$, ou seja, $s_- - P_{\mathcal{A}_-}(a\,s_-) = P_{\mathcal{A}_-}(g\,a)$. Fazendo a mudança $s_- = y - g$ resulta a equivalência entre as identidades seguintes:

$$
\begin{aligned}
y - g - P_{\mathcal{A}_-}(a\,y - a\,g) &= P_{\mathcal{A}_-}(g\,a) \\
y - g - P_{\mathcal{A}_-}(a\,y) + P_{\mathcal{A}_-}(a\,g) &= P_{\mathcal{A}_-}(g\,a) \\
y - P_{\mathcal{A}_-}(a\,y) &= g \\
y - P_{\mathcal{A}_-}(y\,a) &= g.
\end{aligned}
$$

A unicidade da equação $g = y - P_{\mathcal{A}_-}(y\,a)$ para $g \in \mathcal{A}$ decorre de forma análoga ao provado para o caso da função $f = x - P_{\mathcal{A}_+}(a\,x)$, para $f \in \mathcal{A}$.

Provemos, de seguida, que $3 \Longrightarrow 2$.

Temos por hipótese que as equações

$$
\begin{cases}
f = x - P_{\mathcal{A}_+}(a\,x) \\
g = y - P_{\mathcal{A}_-}(y\,a)
\end{cases}
$$

têm uma única solução para todo f, $g \in \mathcal{A}$, então em particular para $f = g = e$ as equações

$$
\begin{cases}
x - P_{\mathcal{A}_+}(a\,x) = e \\
y - P_{\mathcal{A}_-}(y\,a) = e
\end{cases}
$$

também têm solução em $\mathcal{A}$.

Provemos agora que $2 \Longrightarrow 1$. Sejam $e+u$ e $e+v$ soluções das equações

$$\begin{cases} x - P_{\mathcal{A}_+}(a\,x) = e \\ y - P_{\mathcal{A}_-}(y\,a) = e \end{cases},$$

respectivamente.

Temos então,

$$\begin{cases} e + u - P_{\mathcal{A}_+}(a(e+u)) = e \\ e + v - P_{\mathcal{A}_-}((e+v)a) = e \end{cases}. \tag{3.16}$$

ou seja,

$$\begin{cases} u = P_{\mathcal{A}_+}(a(e+u)) \\ v = P_{\mathcal{A}_-}((e+v)a) \end{cases} \tag{3.17}$$

e portanto, $u \in \mathcal{A}_+$ e $v \in \mathcal{A}_-$.

Mostremos agora que

$$(e-a)(e+u) = e + u_-, \quad \text{para algum } u_- \in \mathcal{A}_-. \tag{3.18}$$

Temos, por (3.16) que

$$e + u - P_{\mathcal{A}_+}(a(e+u)) = e,$$

então

$$(e-a)(e+u) - (e-a)P_{\mathcal{A}_+}(a(e+u)) = (e-a)e,$$

ou seja

$$(e-a)(e+u) = e \underbrace{-a + (e-a)P_{\mathcal{A}_+}(a(e+u))}_{:=u_-}.$$

Pretendemos portanto provar que $u_- \in \mathcal{A}_-$. As identidades que se seguem são equivalentes:

$$\begin{aligned}
u_- &= -a + (e-a)P_{\mathcal{A}_+}(a(e+u)) \\
&= -a + (e-a)\left[I(a(e+u)) - P_{\mathcal{A}_-}(a(e+u))\right], \text{ porque } P_{\mathcal{A}_+} + P_{\mathcal{A}_-} = I \\
&= -a + (e-a)a(e+u) - (e-a)P_{\mathcal{A}_-}(a(e+u)) \\
&= -a + a(e+u) - a^2(e+u) - (e-a)P_{\mathcal{A}_-}(a(e+u)) \\
&= au - a^2 - a^2u - (e-a)P_{\mathcal{A}_-}(a(e+u)) \\
&= a\left[P_{\mathcal{A}_+}(a(e+u))\right] - a^2 - a^2u - (e-a)P_{\mathcal{A}_-}(a(e+u)), \text{ por (3.17)} \\
&= a\left[P_{\mathcal{A}_+}(a(e+u))\right] - a^2 - a^2u - P_{\mathcal{A}_-}(a(e+u)) + aP_{\mathcal{A}_-}(a(e+u)) \\
&= a\left[P_{\mathcal{A}_+}(a(e+u)) + P_{\mathcal{A}_-}(a(e+u))\right] - a^2 - a^2u - P_{\mathcal{A}_-}(a(e+u))
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= a\left[(P_{\mathcal{A}_+}+P_{\mathcal{A}_-})(a(e+u))\right]-a^2-a^2u-P_{\mathcal{A}_-}(a(e+u))\\
&= a[a(e+u)]-a^2-a^2u-P_{\mathcal{A}_-}(a(e+u)),\ \text{pois } P_{\mathcal{A}_+}+P_{\mathcal{A}_-}=I\\
&= a^2+a^2u-a^2-a^2u-P_{\mathcal{A}_-}(a(e+u))\\
&= -P_{\mathcal{A}_-}(a(e+u)).
\end{aligned}
$$

Logo u_- é um elemento que pertence à imagem de $P_{\mathcal{A}_-}$, ou seja $u_- \in \mathcal{A}_-$.

Vamos mostrar, analogamente, que

$$(e+v)(e-a)=e+v_+,\ \text{para algum } v_+\in\mathcal{A}_+. \tag{3.19}$$

Temos por (3.16) que,

$$e+v-P_{\mathcal{A}_-}((e+v)a)=e,$$

então

$$(e-a)(e+v)-(e-a)P_{\mathcal{A}_-}((e+v)a)=(e-a)e,$$

ou seja,

$$(e-a)(e+v)=e\underbrace{-a+(e-a)P_{\mathcal{A}_-}((e+v)a)}_{:=v_+},$$

isto é,

$$(e-a)(e+v)=e+v_+.$$

Mostremos agora que $v_+\in\mathcal{A}_+$. Temos equivalência entre as identidades seguintes:

$$
\begin{aligned}
v_+ &= -a+(e-a)P_{\mathcal{A}_-}((e+v)a)\\
&= -a+(e-a)\left[I((e+v)a)-P_{\mathcal{A}_+}((e+v)a)\right]\\
&= -a+(e-a)(e+v)a-(e-a)P_{\mathcal{A}_+}((e+v)a)\\
&= -a+(e+v)a-a^2(e+v)-(e-a)P_{\mathcal{A}_+}((e+v)a)\\
&= -a+a+va-a^2-a^2v-P_{\mathcal{A}_+}((e+v)a)+aP_{\mathcal{A}_+}((e+v)a)\\
&= \left[P_{\mathcal{A}_-}((e+v)a)\right]a-a^2-a^2v-P_{\mathcal{A}_+}((e+v)a)+aP_{\mathcal{A}_+}((e+v)a),\ \text{por (3.17)}\\
&= a\left[P_{\mathcal{A}_-}((e+v)a)+P_{\mathcal{A}_+}((e+v)a)\right]-a^2-a^2v-P_{\mathcal{A}_+}((e+v)a)\\
&= a\left[I((e+v)a)\right]-a^2-a^2v-P_{\mathcal{A}_+}((e+v)a)\\
&= a[(e+v)a]-a^2-a^2v-P_{\mathcal{A}_+}((e+v)a)\\
&= a^2+a^2v-a^2-a^2v-P_{\mathcal{A}_+}((e+v)a)\\
&= -P_{\mathcal{A}_+}((e+v)a).
\end{aligned}
$$

Assim, v_+ é um elemento que pertence à imagem de $P_{\mathcal{A}_+}$, então $v_+\in\mathcal{A}_+$.

Multiplicando (3.18) por $e+v$ vem,

$$\underbrace{(e+v)(e-a)}_{e+v_+,\ \text{por (3.19)}}(e+u) = (e+v)(e+u_-)$$

e consequentemente,

$$\underbrace{(e+\underbrace{v_+}_{\in\mathcal{A}_+})(e+\underbrace{u}_{\in\mathcal{A}_+})}_{\in\mathcal{A}_+} = \underbrace{(e+\underbrace{v}_{\in\mathcal{A}_-})(e+\underbrace{u_-}_{\in\mathcal{A}_-})}_{\in\mathcal{A}_-}$$

donde,

$$\begin{cases} (e+v_+)(e+u) = e \\ (e+v)(e+u_-) = e \end{cases} .$$

Temos então que $e+v$ é invertível à direita e $e+u$ é invertível à esquerda. Como, por hipótese, cada elemento de $\mathcal{A}$ que tem inverso à esquerda ou à direita é invertível então:

$$\begin{cases} (e+u)^{-1} = e+v_+ \\ (e+v)^{-1} = e+u_- \end{cases} .$$

Substituindo em (3.18) ou em (3.19) concluímos que

$$e-a = (e+u_-)(e+v_+)$$

que dá a factorização canónica de $e-a$.

■

Corolário 3.1 *Se o elemento $e-a$ admite a factorização canónica $e-a=(e+a_-)(e+a_+)$, então as soluções $x=x_f$ e $y=y_g$ das equações*

$$\begin{cases} x - P_{\mathcal{A}_+}(a\,x) = f \\ y - P_{\mathcal{A}_-}(y\,a) = g \end{cases}$$

são dadas, respectivamente, por:

$$\begin{cases} x_f = f + (e+a_+)^{-1}P_{\mathcal{A}_+}[(e+a_-)^{-1}P_{\mathcal{A}_+}(a\,f)] \\ y_g = g + P_{\mathcal{A}_-}[P_{\mathcal{A}_-}(g\,a)(e+a_+)^{-1}](e+a_-)^{-1} \end{cases} .$$

Mais, no caso particular de $f=g=e$, então

$$\begin{cases} x_e = (e+a_+)^{-1} \\ y_e = (e+a_-)^{-1} \end{cases} .$$

Demonstração. Já mostrámos anteriormente que as soluções das equações

$$\begin{cases} x - P_{\mathcal{A}_+}(a\,x) = f \\ y - P_{\mathcal{A}_-}(y\,a) = g \end{cases}$$

são dadas, respectivamente, por

$$x = f + (e+a_+)^{-1}P_{\mathcal{A}_+}[(e+a_-)^{-1}P_{\mathcal{A}_+}(a\,f)] \tag{3.20}$$

e por

$$y = g + (e+a_-)^{-1}P_{\mathcal{A}_-}[(e+a_+)^{-1}P_{\mathcal{A}_-}(g\,a)].$$

Falta então mostrar o caso particular de $f = g = e$. Ora se na equação (3.20) substituirmos f por e, temos equivalência entre as identidades seguintes:

$$\begin{aligned}
x_e &= e + (e+a_+)^{-1}P_{\mathcal{A}_+}[(e+a_-)^{-1}P_{\mathcal{A}_+}(a\,e)] \\
&= e + (e+a_+)^{-1}P_{\mathcal{A}_+}[(e+a_-)^{-1}P_{\mathcal{A}_+}(a)] \\
&= e + (e+a_+)^{-1}P_{\mathcal{A}_+}\left[(e+a_-)^{-1}\left(I(a) - P_{\mathcal{A}_-}(a)\right)\right], \text{ porque } P_{\mathcal{A}_-} + P_{\mathcal{A}_+} = I \\
&= e + (e+a_+)^{-1}P_{\mathcal{A}_+}[(e+a_-)^{-1}a] - (e+a_+)^{-1}\underbrace{P_{\mathcal{A}_+}[\underbrace{(e+a_-)^{-1}}_{\in\mathcal{A}_-}\underbrace{P_{\mathcal{A}_-}(a)}_{\in\mathcal{A}_-}]}_{=0} \\
&= e + (e+a_+)^{-1}P_{\mathcal{A}_+}[(e+a_-)^{-1}a] \\
&= e - (e+a_+)^{-1}P_{\mathcal{A}_+}[(e+a_-)^{-1}(-a)] \\
&= e - (e+a_+)^{-1}P_{\mathcal{A}_+}[(e+a_-)^{-1}[(e-a)-e]] \\
&= e - (e+a_+)^{-1}P_{\mathcal{A}_+}[(e+a_-)^{-1}(e-a) - (e+a_-)^{-1}e] \\
&= e - (e+a_+)^{-1}P_{\mathcal{A}_+}[(e+a_+) - (e+a_-)^{-1}], \text{ pois } e - a = (e+a_-)(e+a_+) \\
&= e + (e+a_+)^{-1}P_{\mathcal{A}_+}[-e - a_+ + (e+a_-)^{-1}] \\
&= e + (e+a_+)^{-1}P_{\mathcal{A}_+}[-a_+ \underbrace{-e + (e+a_-)^{-1}}_{\in\mathcal{A}_-}] \\
&= e + (e+a_+)^{-1}P_{\mathcal{A}_+}(-a_+) + (e+a_+)^{-1}\underbrace{P_{\mathcal{A}_+}[-e + (e+a_-)^{-1}]}_{=0} \\
&= e + (e+a_+)^{-1}P_{\mathcal{A}_+}(-a_+) \\
&= e + (e+a_+)^{-1}(-a_+) \\
&= e - (e+a_+)^{-1}a_+ \\
&= (e+a_+)(e+a_+)^{-1} - (e+a_+)^{-1}a_+ \\
&= (e+a_+)^{-1}(e + a_+ - a_+) \\
&= (e+a_+)^{-1}e \\
&= (e+a_+)^{-1}.
\end{aligned}$$

Concluímos então que para $f = e$, $x_e = (e + a_+)^{-1}$.

De forma análoga, vamos mostrar que no caso de $g = e$, $y_e = (e + a_-)^{-1}$.

Consideremos, então, $g = e$ na equação $y_g = g + (e + a_-)^{-1} P_{\mathcal{A}_-}[(e + a_+)^{-1} P_{\mathcal{A}_-}(g\, a)]$, donde decorre equivalência entre as identidades que se seguem:

$$\begin{aligned}
y_e &= e + (e+a_-)^{-1} P_{\mathcal{A}_-}[(e+a_+)^{-1} P_{\mathcal{A}_-}(e\, a)] \\
&= e + (e+a_-)^{-1} P_{\mathcal{A}_-}[(e+a_+)^{-1} P_{\mathcal{A}_-}(a)] \\
&= e + (e+a_-)^{-1} P_{\mathcal{A}_-}[(e+a_+)^{-1} \big(I(a) - P_{\mathcal{A}_+}(a)\big)], \text{ pois } P_{\mathcal{A}_+} + P_{\mathcal{A}_-} = I \\
&= e + (e+a_-)^{-1} P_{\mathcal{A}_-}[(e+a_+)^{-1} a] - (e+a_-)^{-1} \underbrace{P_{\mathcal{A}_-}[\underbrace{(e+a_+)^{-1}}_{\in \mathcal{A}_+} \underbrace{P_{\mathcal{A}_+}(a)}_{\in \mathcal{A}_+}]}_{=0} \\
&= e + (e+a_-)^{-1} P_{\mathcal{A}_-}[(e+a_+)^{-1} a] \\
&= e - (e+a_-)^{-1} P_{\mathcal{A}_-}[(e+a_+)^{-1} (-a)] \\
&= e - (e+a_-)^{-1} P_{\mathcal{A}_-}[(e+a_+)^{-1} [(e-a) - e]] \\
&= e - (e+a_-)^{-1} P_{\mathcal{A}_-}[(e+a_+)^{-1} (e-a) - (e+a_+)^{-1} e] \\
&= e - (e+a_-)^{-1} P_{\mathcal{A}_-}[(e+a_+)^{-1} (e+a_+)(e+a_-) - (e+a_+)^{-1} e] \\
&= e - (e+a_-)^{-1} P_{\mathcal{A}_-}[(e+a_-) - (e+a_+)^{-1}] \\
&= e + (e+a_-)^{-1} P_{\mathcal{A}_-}[-e - a_- + (e+a_+)^{-1}] \\
&= e + (e+a_-)^{-1} P_{\mathcal{A}_-}[\underbrace{(e+a_+)^{-1} - e}_{\in \mathcal{A}_+} - a_-] \\
&= e + (e+a_-)^{-1} P_{\mathcal{A}_-}[\underbrace{(e+a_+)^{-1} - e}_{\in \mathcal{A}_+}] - (e+a_-)^{-1} P_{\mathcal{A}_-}(a_-) \\
&= e - (e+a_-)^{-1} P_{\mathcal{A}_-}(a_-) \\
&= e - (e+a_-)^{-1} a_- \\
&= (e+a_-)^{-1}(e+a_-) - (e+a_-)^{-1} a_- \\
&= (e+a_-)^{-1}(e + a_- - a_-) \\
&= (e+a_-)^{-1} e \\
&= (e+a_-)^{-1}.
\end{aligned}$$

Temos então para $g = e$, $y_e = (e + a_-)^{-1}$.

■

Passamos de seguida a introduzir um resultado auxiliar para o Corolário que se segue.

Teorema 3.8 *[16] Sejam X um espaço de Banach e $T \in \mathcal{B}(X, X)$. Se $\|T\| < 1$, então o operador $(I-T)^{-1}$ existe, é um operador linear limitado em X e é dado por:*

$$(I-T)^{-1} = \sum_{j=0}^{\infty} T^j = I + T + T^2 + \ldots$$

onde $\sum_{j=0}^{\infty} T^j$ é uma série absolutamente convergente em norma.

Corolário 3.2 *Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra de Banach decomponível e $a \in \mathcal{A}$. Se a satisfaz a condição,*

$$\|e-a\| < \min\{\|P_{\mathcal{A}_+}\|^{-1}, \|P_{\mathcal{A}_+-}\|^{-1}\} \tag{3.21}$$

então $e-a$ admite a seguinte factorização canónica $e-a = (e+a_-)(e+a_+)$.

Demonstração. Consideremos para a, $x \in \mathcal{A}$ os operadores T_a e S_a dados por:

$$\begin{cases} T_a(x) = P_{\mathcal{A}_+}(a\,x) + P_{\mathcal{A}_-}(x) \\ S_a(x) = P_{\mathcal{A}_+}(x) + P_{\mathcal{A}_-}(x\,a) \end{cases}.$$

As identidades seguintes são equivalentes:

$$\begin{aligned} T_a(x) - P_{\mathcal{A}_-}(x) &= P_{\mathcal{A}_+}(a\,x) \\ T_a(x) - I(x) + P_{\mathcal{A}_+}(x) &= P_{\mathcal{A}_+}(a\,x) \\ T_a(x) - I(x) &= P_{\mathcal{A}_+}(a\,x) - P_{\mathcal{A}_+}(x) \\ T_a(x) - I(x) &= P_{\mathcal{A}_+}(a\,x - x) \\ T_a(x) - I(x) &= P_{\mathcal{A}_+}((a-e)x). \end{aligned}$$

e,

$$\begin{aligned} S_a(x) - P_{\mathcal{A}_+}(x) &= P_{\mathcal{A}_-}(x\,a) \\ S_a(x) - I(x) + P_{\mathcal{A}_-}(x) &= P_{\mathcal{A}_-}(x\,a) \\ S_a(x) - I(x) &= P_{\mathcal{A}_-}(x\,a) - P_{\mathcal{A}_-}(x) \\ S_a(x) - I(x) &= P_{\mathcal{A}_-}(x(a-e)) \\ (S_a - I)(x) &= P_{\mathcal{A}_-}((a-e)x). \end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned} \|I - T_a\| &= \|P_{\mathcal{A}_+}(e-a)\| \\ &\leq \|P_{\mathcal{A}_+}\|\,\|e-a\| \\ &< 1, \text{ porque } \|e-a\| < \min\{\|P_{\mathcal{A}_+}\|^{-1}, \|P_{\mathcal{A}_-}\|^{-1}\} \end{aligned}$$

e,

$$\begin{aligned}
\|I - S_a\| &= \|P_{\mathcal{A}_-}(a-e)\| \\
&\leq \|P_{\mathcal{A}_-}\| \, \|a-e\| \\
&< 1, \text{ porque } \|a-e\| = \|e-a\| < \min\{\|P_{\mathcal{A}_+}\|^{-1}, \, \|P_{\mathcal{A}_-}\|^{-1}\}.
\end{aligned}$$

Uma vez que $\|I - T_a\| < 1$ e $\|I - S_a\| < 1$, então pelo Teorema 3.8, T_a e S_a são operadores invertíveis e portanto admitem uma factorização canónica, como podemos consultar detalhadamente no Teorema 9.1 da secção XXIX.9 de [13].

■

Capítulo 4

Teoria de Fredholm e teoria espectral

O propósito principal deste capítulo é descrever inter-relações entre as propriedades de invertibilidade, Fredholm e espectrais para os operadores de Toeplitz em estudo.

4.1 Teoria de Fredholm e teoria espectral

Definição 4.1 *O **espectro** de um operador $A \in \mathcal{B}(X)$ é o conjunto,*

$$sp\ A := \{\lambda \in \mathbb{C} \, : \, A - \lambda\, I \quad \textit{é não invertível}\}\,.$$

Chamamos **resolvente** de A ao operador dado por

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}\backslash sp\ A & \longrightarrow & \mathcal{B}(X) \\ \lambda & \mapsto & (A - \lambda\, I)^{-1}. \end{array}$$

Designamos por **espectro essencial** de $A \in \mathcal{B}(X)$ o conjunto,

$$sp_{ess}\, A = \{\lambda \in \mathbb{C} : \quad A - \lambda\, I \quad \text{não é de Fredholm}\}.$$

Perante tais definições decorre que:

1. $sp_{ess}\, A \ \subset\ sp\, A$, porque todo o operador invertível é de Fredholm, logo se não é de Fredholm também não é invertível e portanto, dado $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $A - \lambda I$ não é de Fredholm então $A - \lambda I$ não é invertível;

2. $sp_{ess}\, A$ é invariante a menos de uma perturbação compacta.

Definição 4.2 *Sejam X e Y espaços de Banach e $A \in \mathcal{B}(X,Y)$. O **núcleo** e a **imagem** de A são dados, respectivamente, por:*

$$\begin{aligned} Ker\,A: &= \{x \in X \,:\, A\,x = 0\} \\ Im\,A: &= \{y \in Y: \text{ existe um } x \in X \text{ tal que } y = A\,x\}. \end{aligned}$$

Definição 4.3 *Dizemos que um operador de $A \in \mathcal{B}(X,Y)$ é **normalmente solúvel** se a imagem de A é um subespaço fechado de Y, isto é, se $Im\,A = \overline{Im\,A}$.*

Teorema 4.1 *Seja $a \in W$ e $T(a) \in \mathcal{B}(l^p)$. Se $a = a_- a_+$, com $a_\pm \in \mathcal{G}\,W_\pm$ então*

$$T^{-1}(a) = T(a_-^{-1})T(a_+^{-1}).$$

Demonstração. Para mostrar o pretendido comecemos por mostrar que

$$T(a_\mp)^{-1} \,=\, T(a_\mp^{-1}).$$

Ora, como $a \in W$ e a admite uma factorização da forma $a \,=\, a_-\,a_+$, com $a_\mp \in \mathcal{G}\,W_\mp$, então pela Proposição 2.4, $T(a) \,= T(a_-\,a_+) \,=\, T(a_-)\,T(a_+)$.

Mais, sendo $a_\mp \in \mathcal{G}\,W_\mp$ então $a_\mp$ são invertíveis nas respectivas classes e assim pela Proposição 2.4 temos,

$$T(a_-^{-1})\,T(a_-) \,=\, T(a_-^{-1}\,a_-) \,=\, I \,=\, T(a_-\,a_-^{-1}) \,=\, T(a_-)\,T(a_-^{-1}). \tag{4.1}$$

De forma análoga, temos

$$T(a_+^{-1})\,T(a_+) \,=\, T(a_+^{-1}\,a_+) \,=\, I \,=\, T(a_+\,a_+^{-1}) \,=\, T(a_+)\,T(a_+^{-1}). \tag{4.2}$$

Donde concluímos que $T(a_\mp)^{-1} \,=\, T(a_\mp^{-1})$.

Tendo por base o que acabámos de mostrar, podemos afirmar que as identidades seguintes são equivalentes:

$$\begin{aligned} T(a) &= T(a_-)T(a_+), \text{ pela Proposição 2.4} \\ T(a_-)^{-1}T(a) &= T(a_+) \\ T(a_-)^{-1}T(a)T(a_+)^{-1} &= I. \end{aligned}$$

Donde concluímos que

$$T^{-1}(a) = T(a_-)^{-1}T(a_+)^{-1},$$

mas como $T^{-1}(a_\pm) = T(a_\pm^{-1})$ então temos finalmente que

$$T^{-1}(a) = T(a_-^{-1})\,T(a_+^{-1}).$$

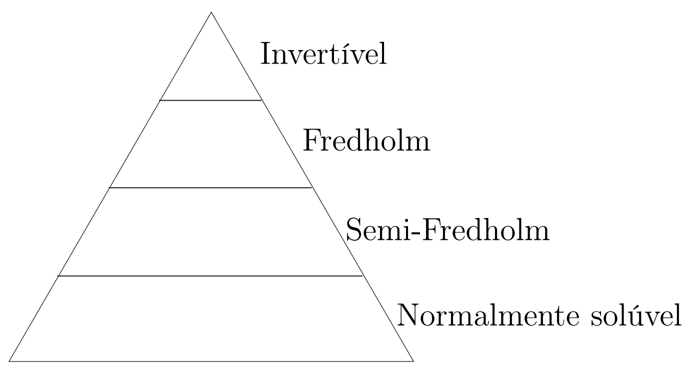
■

Para operadores normalmente solúveis $A \in \mathcal{B}(X,Y)$ designamos por **co-núcleo** de A, e representamos por $Coker\,A$, o espaço $Y/\,Im\,A$. Ou seja,

$$Coker\,A = Y/Im\,A.$$

Um operador normalmente solúvel é designado por semi-Fredholm se a dimensão do núcleo ou a dimensão do co-núcleo são finitas. Assim, e atendendo às definições anteriores, no caso do operador $A \in \mathcal{B}(X,Y)$ ser normalmente solúvel e as dimensões do núcleo e do co-núcleo serem finitas dizemos que o operador A é de **Fredholm**.

Para o conjunto de todos os operadores lineares limitados podemos estabelecer a seguinte hierarquia:



Definição 4.4 *Designamos por **índice** de um operador de Fredholm $A \in \mathcal{B}(X,Y)$ o inteiro,*

$$Ind\,A := dim\;Ker\,A \;-\; dim\,Coker\,A.$$

Definição 4.5 *Dois operadores lineares limitados T e S actuando entre espaços de Banach dizem-se **equivalentes** se existirem dois outros operadores invertíveis e limitados E e F tais que*

$$T \;=\; E\,S\,F\,.$$

Introduzimos agora um resultado auxiliar para o Teorema que se segue.

Teorema 4.2 *[6] Se A é um operador de Fredholm e K é um operador compacto, então podemos afirmar que $A+K$ é de Fredholm e $Ind\,(A+K) = Ind\,A$.*

Teorema 4.3 *Seja $a \in W$. O operador $T(a)$ é de Fredholm em l^p $\quad (1 \leq p \leq \infty)$ se e só se $a(t) \neq 0$ para todo o $t \in \Gamma_0$. Neste caso, $Ind\;T(a) \;=\; -\,wind\;a$.*

Demonstração. Comecemos por mostrar que se $a(t) \neq 0$ para todo o $t \in \Gamma_0$ e $Ind(T(a)) \;=\; -\,wind\;a$ então $T(a)$ é um operador de Fredholm em l^p.

Suponhamos que $wind\;a \;=\; m$ e que a não tem zeros em Γ_0.

Temos então,

$$\begin{cases} a \in W \\ a\,(t) \neq 0 \\ wind\;a = \;m \end{cases} .$$

Logo, pelo Teorema 3.6

$$a(t) = a_-(t)\chi_m a_+(t) \quad \text{com} \quad a_\pm \in \mathcal{G}\,W_\pm\,, \text{ pois } \chi_m = t^m.$$

Donde, pela Proposição 2.4,

$$T(a) \;=\; T(a_-\chi_m a_+) = T(a_-)\;T(\chi_m)\;T(a_+).$$

Como $a_\pm \in \mathcal{G}\,W_\pm$ então $T(a_-)$ e $T(a_+)$ são operadores invertíveis, e como mostrámos no teorema anterior que,

$$T^{-1}(a_-) = T(a_-^{-1})$$

$$T^{-1}(a_+) = T(a_+^{-1})$$

então temos,

$$T(a) = \qquad \underbrace{T(a_-)}_{\text{operador invertível}} \qquad T(\chi_m) \qquad \underbrace{T(a_+)}_{\text{operador invertível}} \qquad .$$

Portanto $T(a)$ é equivalente a $T(\chi_m)$ e portanto $T(a)$ é um operador de Fredholm se e só se $T(\chi_m)$ é de Fredholm, pois $T(a_-)$ e $T(a_+)$ são operadores invertíveis (logo são também operadores de Fredholm). Assim, basta então mostrar que $T(\chi_m)$ é um operador de Fredholm para se concluir que $T(a)$ é um operador de Fredholm. Passaremos então a mostrar que $T(\chi_m)$ tem imagem fechada, e as dimensões do seu núcleo e do seu co-núcleo são finitas.

Para mostrar que $T(\chi_m)$ tem imagem fechada vamos considerar três casos:

1. $m = 0$

   Para $m = 0$ temos $T(\chi_0) = I$, por (2.18), e daí $Im\,T(\chi_m) = l^p$, logo é um conjunto fechado (de acordo com a norma em l^p).

2. $m > 0$

   Se $m > 0$, então por (2.19) temos $Im\,T(\chi_m) = \{\{0, 0, ..., 0, x_1, x_2, ...\} : \{x_1, x_2, ...\} \in l^p\}$ que é naturalmente um subespaço fechado de l^p.

3. $m < 0$

   Neste caso temos por (2.19), $Im\,T(\chi_m) = \{\{x_{-m+1}, x_{-m+2}, ...\} : \{x_1, x_2, ...\} \in l^p\}$ que também é um subespaço fechado de l^p.

De 1, 2 e 3 concluímos que $T(\chi_m)$ tem imagem fechada.

Mostremos agora que as dimensões do núcleo e do co-núcleo são finitas.

Seja $x = \{x_1, ..., x_n, ...\} \in l^p$.

Por (2.19) vem

$$T(\chi_m)x = \begin{cases} \{x_1, \ldots, x_n, ...\} & , \text{ para } m = 0 \\ \{\underbrace{0, ..., 0,}_{m} x_1, x_2, ...\} & , \text{ para } m > 0 \\ \{x_{-m+1}, x_{-m+2}, ...\} & , \text{ para } m < 0 \end{cases}.$$

Directamente da definição de $T(\chi_m)$ e da definição de núcleo, vem,

$$dim\ Ker\,T(\chi_m) = \begin{cases} 0 & , \text{ se } m \geq 0 \\ |m| = -m & , \text{ se } m < 0 \end{cases}.$$

Logo, temos que $dim\ Ker\,T(\chi_m)$ é finita para qualquer $m \in \mathbb{Z}$.

Analisemos agora a dimensão do co-núcleo de $T(\chi_m)$. Temos,

$$dim\ CoKer\,T(\chi_m) = \begin{cases} m & , \text{ se } m > 0 \\ 0 & , \text{ se } m \leq 0 \end{cases}$$

que é finita.

Portanto, $T(\chi_m)$ é de Fredholm de índice $-m$, pois

$$\begin{aligned} Ind\,T(\chi_m) = dim\,Ker\,(T(\chi_m)) - dim\,(Coker\,T(\chi_m)) &= \begin{cases} 0 - m & , \text{ se } m \geq 0 \\ -m - 0 & , \text{ se } m < 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} -m & , \text{ se } m \geq 0 \\ -m & , \text{ se } m < 0 \end{cases} \\ &= -m. \end{aligned}$$

Consequentemente, $T(a)$ é um operador de Fredholm de índice $-m$ e tal índice coincide com $wind(\chi_m) = -wind(a)$, onde $wind(a)$ denota o número de voltas que o gráfico de a dá em volta da origem no sentido contrário ao dos ponteiros do relógio.

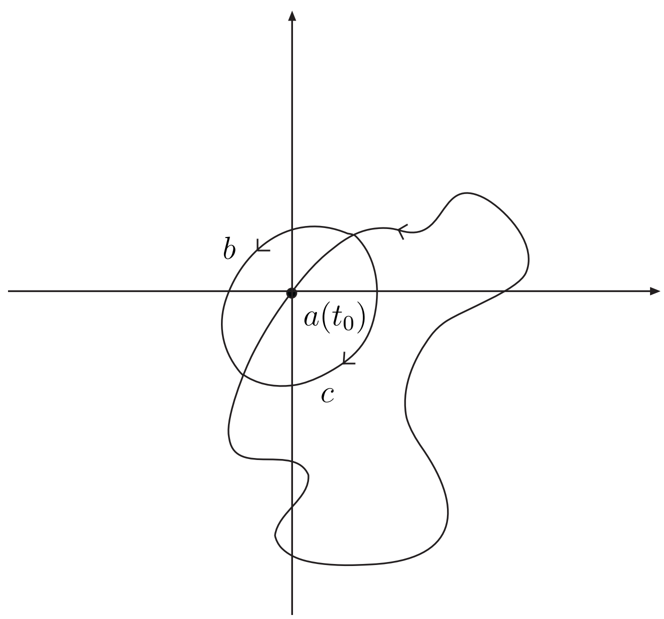
Provemos agora que, se $T(a)$ é um operador de Fredholm em $l^p \quad (1 \leq p \leq \infty)$ então $a(t) \neq 0$, para todo o $t \in \Gamma_0$.

Suponhamos, por absurdo, que

$$\exists \quad t_0 \in \Gamma_0 : \quad a(t_0) = 0, \tag{4.3}$$

isto é, que $T(a)$ não é de Fredholm.

Assim, podemos encontrar $b,\, c \in \mathcal{G}\,W$



tais que

$$\|a-b\|_W < \frac{\epsilon}{2} \quad \text{e} \quad \|a-c\|_W < \frac{\epsilon}{2}, \text{ para um valor } \epsilon > 0 \tag{4.4}$$

(tão pequeno quanto se deseje) e

$$|wind\,b \,-\, wind\,c| = 1 \tag{4.5}$$

pois, $wind\,b = 1$ e $wind\,c = 0$.

Nestas circunstâncias, temos que $T(b)$ e $T(c)$ são operadores de Fredholm, pois $b(t) \neq 0$ e $c(t) \neq 0$, e dado que o índice de Fredholm é estável sob pequenas perturbações (do símbolo), pelo Teorema 4.2, temos por (4.4) que

$$\|b-c\| = \|b-a+a-c\| \leq \|a-b\| + \|a-c\| < \epsilon$$

e daí,

$$Ind\,T(b) \;=\; Ind\,T(c).$$

Mas esta última conclusão entra em contradição com (4.5). Logo (4.3) é falso, ou seja, $a(t) \neq 0$, para todo o $t \in \Gamma_0$.

■

Corolário 4.1 *Se $a \in W$, então $sp_{ess}\,T(a) = a(\Gamma_0)$.*

Demonstração. Pretendemos mostrar que $sp_{ess}\,T(a) = a(\Gamma_0)$, onde $sp_{ess}\,T(a) = \{\lambda \in \mathbb{C} : T(a) - \lambda I$ não é de Fredholm$\}$, isto é que:

1. $sp_{ess}\,T(a) \subseteq a(\Gamma_0)$

   Seja $\lambda \in sp_{ess}\,T(a)$. Então, por definição de espectro essencial, temos $T(a) - \lambda I$ não é de Fredholm, mas então podemos afirmar que $T(a - \lambda)$ não é de Fredholm.

   Pelo Teorema 4.3 sabemos que $a(t) - \lambda$ tem zeros em Γ_0; isto é, existe $t_0 \in \Gamma_0$ tal que

   $$a(t_0) = \lambda.$$

   Por outras palavras,

   $$\lambda \in a(\Gamma_0).$$

   Portanto

   $$sp_{ess}T(a) \subseteq a(\Gamma_0). \tag{4.6}$$

2. $a(\Gamma_0) \subseteq sp_{ess}T(a)$

   Seja $\lambda \in a(\Gamma_0)$, então $\lambda = a(t_1)$ para algum $\quad t_1 \in \Gamma_0$.

   Logo $a(t_1) - \lambda = 0$ para algum $\quad t_1 \in \Gamma_0$.

   Assim pelo Teorema 4.3, $T(a(t_1) - \lambda)$ não é de Fredholm. Portanto $\lambda \in sp_{ess}\,T(a)$. Daí que

   $$a(\Gamma_0) \subseteq \; sp_{ess}\,T(a). \tag{4.7}$$

Concluímos finalmente de (4.6) e de (4.7) que $sp_{ess}\,T(a) = a(\Gamma_0)$.

■

Este corolário permite-nos afirmar que se a é uma função contínua em Γ_0 então o espectro essencial do operador de Toeplitz é $a(\Gamma_0)$.

Enunciamos agora um resultado do qual vamos fazer uso no Corolário seguinte.

Teorema 4.4 (Teorema de Gohberg) *[8] Seja $a \in \mathrm{C}$, onde $\mathrm{C} := \mathrm{C}(\Gamma_0)$ é o conjunto de todas as funções contínuas de valores complexos em Γ_0. O operador $T(a)$ é invertível se e só se é de Fredholm de índice zero.*

Corolário 4.2 *Seja $a \in W$. O operador $T(a)$ é invertível em l^p $(1 \leq p \leq \infty)$ se e só se $a(t) \neq 0$, para todo o $t \in \Gamma_0$ e wind $a = 0$.*

Demonstração. Comecemos por mostrar que se $T(a)$ é invertível em l^p $(1 \leq p \leq \infty)$ então $a(t) \neq 0,$ para todo o $t \in \Gamma_0$ e $wind\ a = 0$.

Ora, se $T(a)$ é invertível então, pelo Teorema 4.4 $T(a)$ é de Fredholm de índice zero, logo pelo Teorema 4.3 temos que

$$a(t) \neq 0, \text{ para todo o } t \in \Gamma_0 \text{ e } Ind(T(a)) = \ -wind\ a = 0$$

o que prova o pretendido.

Mostremos agora que se $a(t) \neq 0,$ para todo o $t \in \Gamma_0$ e $wind\, a = 0$, então o operador $T(a)$ é invertível em $l^p \quad (1 \leq p \leq \infty)$.

Se $a(t) \neq 0,$ para todo o $t \in \Gamma_0$ e $wind\, a = 0$ então, pelo Teorema 3.6 , a pode ser escrito na forma,

$$a = a_- a_+ \,, \quad a_\pm \in \mathcal{G}\, W_\pm.$$

Pela Proposição 2.4 temos

$$T(a) = T(a_- a_+) \ = \ T(a_-)\, T(a_+).$$

Mas os operadores $T(a_-)$ e $T(a_+)$ são invertíveis, mais, $T(a_-^{-1})$ é o operador inverso de $T(a_-)$ e $T(a_+^{-1})$ é o operador inverso de $T(a_+)$.

Então, pelo Teorema 4.1

$$T(a_-^{-1})\, T(a_+^{-1})$$

é o inverso do operador $T(a)$.

E portanto $T(a)$ é invertível.

■

O Corolário que apresentaremos de seguida é um caso particular do resultado estabelecido por I. Gohberg, em 1952, para o caso de $a \in \mathrm{C}(\Gamma_0)$, cf. [3].

Corolário 4.3 *Se $a \in W$, então*

$$sp\ T(a) = a(\Gamma_0) \cup \{\lambda \in \mathbb{C} \setminus a(\Gamma_0) : \ wind\ (a - \lambda) \neq 0\}.$$

Demonstração. Pretendemos mostrar que:

1. $sp\, T(a) \subseteq a(\Gamma_0) \cup \{\lambda \in \mathbb{C} \setminus a(\Gamma_0) \ : \ wind\ (a - \lambda) \neq 0\}$

   Seja $\lambda \in sp\, T(a)$. Então, por definição de espectro, $T(a) - \lambda\, I$ não é invertível e daí temos que $T(a - \lambda)$ não é invertível. Assim, pelo Corolário 4.2 existe um $t_0 \in \Gamma_0$ tal que
   $$a(t_0) - \lambda = 0 \text{ ou } wind\,(a - \lambda) \neq 0.$$
   Assim, de $a(t_0) - \lambda = 0$ vem $a(t_0) = \lambda$ e portanto $\lambda \in a(\Gamma_0)$. Logo $sp\, T(a) \subseteq a(\Gamma_0) \cup \{\lambda \in \mathbb{C} \setminus a(\Gamma_0) : \ wind\,(a - \lambda) \neq 0\}$.

2. $a(\Gamma_0) \cup \{\lambda \in \mathbb{C} \setminus a(\Gamma_0) : \ wind\ (a - \lambda) \neq 0\} \subseteq sp\, T(a)$

   Seja $\lambda \in \{\lambda \in \mathbb{C} \setminus a(\Gamma_0) : \ wind\,(a - \lambda) \neq 0\}$. Então $\lambda \notin a(\Gamma_0)$, isto é $\lambda \neq a(t_0)$, para todo o $t_0 \in \Gamma_0$, ou ainda $a(t_0) - \lambda \neq 0$, para todo o $t_0 \in \Gamma_0$ e, $wind\,(a - \lambda) \neq 0$. Assim, pelo Corolário 4.2 ($T(a)$ não é invertível se e só se $a(t) = 0$, para algum t, ou $wind\,(a - \lambda) \neq 0$) $T(a - \lambda)$ não é invertível, isto é $T(a) - \lambda I$ não é invertível. Logo, $\lambda \in spT(a)$.

■

Corolário 4.4 *Se $a \in W$ e $T(a)$ é compacto em l^p $(1 \leq p \leq \infty)$, então a é identicamente nulo.*

Demonstração. Sabemos que I é um operador de Fredholm, logo $\lambda\, I$ (com $\lambda \neq 0$) é de Fredholm e como $T(a)$ é compacto, por hipótese, então $T(a) - \lambda\, I$ é um operador de Fredholm (para $\lambda \neq 0$), pelo Teorema 4.2. Assim, se $T(a) - \lambda\, I$ é de Fredholm para $\lambda \neq 0$ então,

$$sp_{ess}\ T(a) = \{0\}.$$

Como $sp_{ess}\ T(a) = a(\Gamma_0)$, pelo Corolário 4.1, então

$$a(\Gamma_0) = \{0\}\,.$$

■

Definição 4.6 *Seja T um operador linear limitado actuando de X para X, onde X é um espaço de Banach. Chamamos* ***raio espectral*** *e representamos por $rad\,T$, a*

$$rad\,T = \max\{|\lambda| : \lambda \in sp\,T\}.$$

Por outras palavras, o raio espectral é o mais pequeno raio que permite definir um círculo fechado no plano complexo com centro na origem que contém o espectro de T.

O teorema que apresentaremos de seguida define a **norma do operador de Toeplitz**.

Teorema 4.5 *Se $a \in W$ então para $T(a) : L^2 \longrightarrow L^2$ tem-se*

$$\|T(a)\| = \|a\|_\infty,$$

onde $\|a\|_\infty = max_{t\,\in\Gamma_0} |a(t)|$.

Demonstração. Para mostrar que $\|T(a)\| = \|a\|_\infty$ vamos mostrar que $\|T(a)\| \leq \|a\|_\infty$ e $\|T(a)\| \geq \|a\|_\infty$. Comecemos então por mostrar que $\|T(a)\| \leq \|a\|_\infty$. Para tal, consideremos o operador

$$\begin{aligned} \Phi^{-1}\,T(a)\,\Phi\; : \quad H^2 &\longrightarrow H^2 \\ f &\longmapsto (\Phi^{-1}\,T(a)\,\Phi)\,f, \end{aligned}$$

onde Φ é o mesmo operador usado em §2.4.

Seja $f \in H^2$, então

$$\begin{aligned} \|(\Phi^{-1}\,T(a)\,\Phi)f\|_{H^2} &= \|P(af)\|_{H^2}\,, \quad \text{por (2.27)} \\ &\leq \|P\|\,\|af\|_{H^2} \\ &\leq \|af\|_{H^2}, \quad \text{porque } P \text{ é um projector, logo } \|P\| \leq 1 \\ &\leq \|a\|_\infty\,\|f\|_{H^2}\,, \text{ porque } a \in W. \end{aligned}$$

Como Φ é o operador unitário de H^2 em l^2 temos,

$$\|T(a)\| = \|P(a\,f)\| = \|\Phi^{-1}\,T(a)\,\Phi\| \leq \|a\|_\infty.$$

Mostremos agora que $\|T(a)\| \geq \|a\|_\infty$. Mas, para mostrar o pretendido comecemos por mostrar que $rad\,T(a) = \|a\|_\infty$; isto é, que $rad\,T(a) \leq \|a\|_\infty$ e que $\|a\|_\infty \leq rad\,T(a)$. Mostremos em primeiro lugar que $rad\,T(a) \leq \|a\|_\infty$.

Seja $\eta \in rad\,T(a)$. Então, η é o maior (em valor absoluto) dos valores que pertencem ao espectro de $T(a)$, ou seja, η é o maior dos valores (em valor absoluto) que pertencem a $\mathbb{C}\setminus a(\Gamma_0)$ de modo a que o índice topológico de $a-\eta$ é não nulo, pelo Corolário 4.3 . Tal facto é verdadeiro, porque η tem que estar próximo de $a(t)$ porque se assim não fosse o índice topológico de $a-\eta$ seria nulo (ver figura 1). Logo, $\eta \leq \|a\|_\infty$ e portanto $rad\,T(a) \leq \|a\|_\infty$.

Mostremos agora que $\|a\|_\infty \leq rad\,T(a)$. Seja $\eta = \|a\|_\infty$, então $\eta = max_{t\in\Gamma_0}|a(t)|$, ou seja, η é o maior dos λ que satisfazem $wind(a-\lambda) \neq 0$, logo $\lambda \in rad\,T(a)$, devido ao Corolário 4.3. Portanto, $\|a\|_\infty \leq rad\,T(a)$ e assim concluímos finalmente que,

$$\|a\|_\infty = rad\,T(a).$$

Por outro lado, $rad\,T(a) \leq \|T(a)\|$, atendendo à definição de $rad\,T(a)$. E como $\|a\|_\infty = rad\,T(a)$, concluímos que $\|a\|_\infty \leq \|T(a)\|$; e finalmente,

$$\|a\|_\infty = \|T(a)\|.$$

■

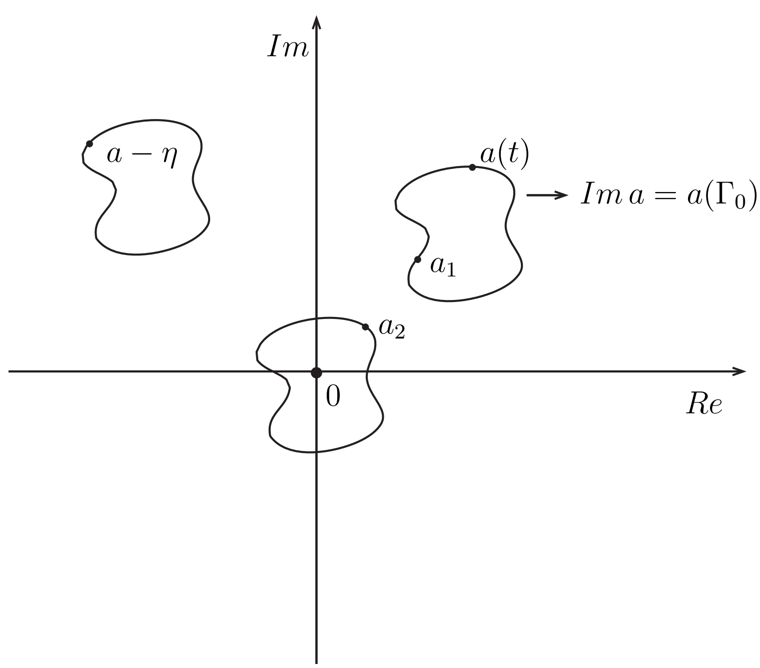


Figura 1: Exemplificação da imagem de a com uma eventual perturbação por η.

Podemos encontrar outra demonstração para este Teorema em [5, secção 1.3].

Capítulo 5

Estabilidade e Convergência

Ao longo deste capítulo teremos como objectivo descrever propriedades de convergência de sucessões de operadores e correspondentes estabilidades.

5.1 Definições e Resultados Auxiliares

Teorema 5.1 *Seja M um subconjunto não vazio do espaço métrico (X, d) e $\overline{M}$ o seu fecho. Então,*

1. *$x \in \overline{M}$ se e só se existe uma sucessão $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ em M tal que $x_n \longrightarrow x$.*
2. *M é fechado se e só se para toda a sucessão $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ com $x_n \in M$, $x_n \longrightarrow x$ implica que $x \in M$.*

Lema 5.2 *Sejam $T : X \longrightarrow X$ um operador linear compacto e $S : X \longrightarrow X$ um operador linear limitado num espaço normado X. Então TS e ST são compactos.*

Teorema 5.3 *Sejam X e Y espaços normados e $T : X \longrightarrow Y$ um operador linear. Então T é compacto se e só se para cada sucessão limitada $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ em X, a correspondente sucessão das imagens por T, $\{T\,x_n\}_{n=1}^{\infty}$, em Y tem uma subsucessão convergente.*

Teorema 5.4 *Seja $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ uma sucessão num espaço normado X. Então:*

1. *Convergência forte (ver Definição 2.22) implica convergência fraca (ver Definição 2.22) com o mesmo limite.*
2. *Se a dimensão de X for finita então a convergência fraca implica convergência forte.*

Lema 5.5 *Seja $X = (X, d)$ um espaço métrico. Então uma sucessão convergente em X é limitada e o seu limite é único.*

Definição 5.1 *Sejam X e Y espaços normados. Seja T um operador linear limitado entre espaços normados ($T : X \longrightarrow Y$). Chamamos* ***operador adjunto*** *de T, e representamos por $T^* : Y' \longrightarrow X'$ ao operador dado por $f(x) = (T^*g)(x) = g(Tx)$ com $g \in Y'$, onde X' e Y' são os espaços duais de X e Y, respectivamente.*

Definição 5.2 *Dizemos que um subconjunto M de X é* ***denso*** *em X se $\overline{M} = X$, isto é se todo o ponto de X é limite de uma sucessão $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, com $x_n \in M$, para todo o n.*

5.2 Convergência de Operadores

Teorema 5.6 (Teorema de Banach-Steinhaus ou da Limitação Uniforme) *Seja $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ uma sucessão de operadores lineares e limitados $T_n : X \longrightarrow Y$ de um espaço de Banach X para um espaço normado Y tal que $\{\|T_n x\|\}_{n=1}^{\infty}$ é limitada para cada $x \in X$, isto é,*

$$\|T_n x\| \leq c_x, \qquad n = 1, 2, ... \tag{5.1}$$

onde c_x é um número real. Então a sucessão das normas $\|T_n\|$ é limitada, isto é, existe um c tal que,

$$\|T_n\| \leq c, \qquad n = 1, 2, ... \tag{5.2}$$

Demonstração. Para cada $k \in \mathbb{N}$, seja $A_k \subset X$ o conjunto de todos os x tais que

$$\|T_n x\| \leq k\,, \quad \text{para todo o } n.$$

Comecemos por mostrar que A_k é fechado. Seja $x \in \overline{A_k}$, então pelo Teorema 5.1, existe uma sucessão $\{x_j\}_{j=1}^{\infty}$ em A_k convergente para x; o que significa que para cada n fixo temos,

$$\|T_n x_j\| \leq k$$

donde vem,

$$\|T_n x\| \leq k$$

porque T_n é contínuo e consequentemente a aplicação $\|T_n\|$ também é contínua, uma vez que a função norma é uma função contínua. Logo, $x \in A_k$. Temos $x_j \in A_k$, x_j convergente para x e $x \in A_k$, então pelo Teorema 5.1 A_k é fechado.

Atendendo a (5.1) cada $x \in X$ pertence a algum A_k. Então, $X = \cup_{k=1}^{\infty} A_k$.

Como X é um espaço de Banach, então X é completo. Logo, atendendo a que $X = \cup_{k=1}^{\infty} A_k$ existe pelo menos um A_k que contém um subconjunto não vazio (cf. Teorema de Baire [16]), seja ele uma bola aberta de centro x_0 e raio r. Temos então $B(x_0, r) \subset A_{k_0}$.

Seja $x \in X$, arbitrário não nulo. Consideremos

$$z = x_0 + \gamma\, x\,, \quad \text{com}\, \gamma = \frac{r}{2\|x\|}. \tag{5.3}$$

Então, $\|z - x_0\| = \|x_0 + \gamma\, x - x_0\| = \|\gamma\, x\| = \left\| \frac{r}{2\|x\|}\, x \right\| < r$ logo $z \in B(x_0, r)$.

Atendendo à definição de A_k e ao facto de $B(x_0, r) \subset A_{k_0}$ temos $\|T_n\, z\| \leq k_0$, para todo o n.

Como $x_0 \in B(x_0, r)$ e $B(x_0, r) \subset A_{k_0}$ então $\|T_n\, x_0\| \leq k_0$, por definição de A_k. Por (5.3) vem,

$$x = \frac{1}{\gamma}(z - x_0).$$

Assim, para todo o n

$$\begin{aligned}
\|T_n\, x\| &= \left\| T_n\, \frac{1}{\gamma}(z - x_0) \right\| \\
&= \frac{1}{\gamma} \|T_n(z - x_0)\| \\
&\leq \frac{1}{\gamma}(\|T_n\, z\| + \|T_n\, x_0\|), \quad \text{pela desigualdade triangular e pela linearidade de } T_n \\
&\leq \frac{1}{\gamma}(k_0 + k_0) \\
&= \frac{2k_0}{\gamma} \\
&= \frac{2k_0}{\frac{r}{2\|x\|}} \\
&= \frac{4k_0\|x\|}{r} \\
&= \frac{4}{r}\, k_0\, \|x\|.
\end{aligned}$$

Então, $\|T_n\| = sup_{\|x\|=1} \|T_n\, x\| \leq \frac{4}{r} k_0\,, \quad$ para todo o n.

Mostrámos assim que $\|T_n\|$ é limitado, isto é, $\|T_n\| \leq \frac{4}{r}\, k_0$.

■

Sejam X e Y espaços de Banach.

Observação 5.1 *Um outro enunciado para este teorema pode ser encontrado em [9] e diz que:*

Seja $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ a sucessão dos operadores $A_n \in \mathcal{B}(X,Y)$ tais que $\{A_n\, x\}_{n=1}^{\infty}$ é uma sucessão convergente em Y para cada $x \in X$. Então,

1. $\sup_{n\geq 1} \|A_n\| < \infty$
2. *o operador A definido por $Ax := \lim_{n\to\infty} A_n x$ é limitado*
3. $\|A\| \leq \underline{\lim}_{\,n\to\infty} \|A_n\|$, *onde $\underline{\lim}$ designa o limite inferior.*

Proposição 5.7 *Se $K \in \mathcal{K}(X,Y)$ e a sucessão $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ de operadores $A_n \in \mathcal{B}(Y)$ converge fortemente para $A \in \mathcal{B}(Y)$, então os operadores $A_n K$ convergem uniformemente para AK.*

Demonstração. Temos, por hipótese, que a sucessão $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ de operadores $A_n \in \mathcal{B}(Y)$ converge fortemente para $A \in \mathcal{B}(Y)$ (isto é, $\|A_n x - Ax\| \to 0,\ n \to \infty$) e pretendemos mostrar que $A_n K$ converge uniformemente para AK, ou seja $\|A_n K - AK\| \to 0,\ n \to \infty$. Sejam então,

$$\begin{aligned} B_1 &:= \{x \in X : \|x\| \leq 1\} \quad \text{e} \\ S_1 &:= \{x \in X : \|x\| = 1\}. \end{aligned}$$

Fixemos $\epsilon > 0$ e consideremos K a actuar de B_1 para um conjunto cujo fecho é um subconjunto compacto de Y; isto é, K é um operador linear compacto, ou seja, é limitado e contínuo. Nestas condições existe uma colecção finita de elementos $x_1, ..., x_N \in B_1$ tais que para cada $x \in S_1$ podemos encontrar um x_j que satisfaz

$$\|Kx - Kx_j\| < \epsilon. \tag{5.4}$$

Assim temos,

$$\begin{aligned} \|A_n Kx - AKx\| &= \|A_n Kx - A_n Kx_j + A_n Kx_j - AKx_j + AKx_j - AKx\| \\ &\leq \|A_n Kx - A_n Kx_j\| + \|A_n Kx_j - AKx_j\| + \|AKx_j - AKx\|, \\ &\quad \text{pela definição de norma} \\ &\leq \|A_n\|\,\|Kx - Kx_j\| + \|A_n Kx_j - AKx_j\| + \|A\|\,\|Kx_j - Kx\|, \\ &\quad \text{porque } A_n \text{ e } A \text{ são operadores limitados} \\ &\leq \|A_n\|\epsilon + \|A_n Kx_j - AKx_j\| + \|A\|\epsilon, \quad \text{por (5.4).} \end{aligned}$$

Pela Observação 5.1 temos que $\|A_n\| \leq M < \infty$ para todo o n e por hipótese, A_n converge fortemente para A, então para n suficientemente grande,

$$\|A_n K x_j - AKx_j\| < \epsilon, \quad \text{para todo o } j.$$

Logo, para n suficientemente grande,

$$\begin{aligned} \|A_n Kx - AKx\| &\leq M\epsilon + \epsilon + \|A\|\epsilon \\ &= (M + 1 + \|A\|)\epsilon \\ &= (M + 1 + \|A\|)\epsilon\|x\|, \quad \text{porque} \quad x \in S_1, \quad \text{logo} \quad \|x\| = 1. \end{aligned}$$

Logo, $\|A_n K - AK\| \leq (M + 1 + \|A\|)\epsilon$, donde se conclui que para n suficientemente grande $\|A_n K - AK\| < \epsilon$, ou seja $\|A_n K - AK\|$ converge para zero e portanto $A_n K$ converge uniformemente para AK.

■

Proposição 5.8 *Se $K \in \mathcal{K}(X, Y)$ e os operadores $A_n \in \mathcal{B}(X)$ convergem fracamente para $A \in \mathcal{B}(X)$, então os operadores KA_n convergem fortemente para KA.*

Demonstração. Pretendemos mostrar que os operadores KA_n convergem fortemente para KA, isto é,

$$\|KA_n x - KAx\| \to 0, \quad \text{para todo o} \quad x \in X.$$

Fixemos $x \in X$, arbitrário.

Por hipótese, sabemos que os operadores $A_n \in \mathcal{B}(X)$ convergem fracamente para $A \in \mathcal{B}(X)$, isto é,

$$\|(A_n x, y) - (Ax, y)\| \to 0, \quad \text{para todo o} \quad x \in X \quad \text{e para todo o} \quad y \in Y^{'}.$$

Ou ainda,

$$(A_n x, y) \to (Ax, y), \quad \text{para todo o} \quad x \in X \quad \text{e para todo o} \quad y \in Y^{'}.$$

Vamos definir o operador

$$\begin{aligned} T_n : \quad Y^{'} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ y &\longmapsto (A_n x, y). \end{aligned}$$

Atendendo ao Teorema 5.4, o operador T_n converge fortemente para o operador T, onde

$$\begin{aligned} T: \ Y' &\longrightarrow \mathbb{C} \\ y &\longmapsto (Ax, y). \end{aligned}$$

Assim, pela Observação 5.1,

$$sup_{n\geq 1}\|A_n x\| = sup_{n\geq 1}\|T_n\| < \infty$$

donde se conclui que a sucessão $\{A_n x\}_{n=1}^{\infty}$ é limitada.

Para concluir a prova falta ainda mostrar que KA_n converge fortemente para KA e, contrariamente ao que pretendemos mostrar, vamos supor que KA_n não converge fortemente para KA. Assim, existe um $\epsilon > 0$ e uma subsucessão de índices $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ tal que

$$\|KA_{n_k}x - KAx\| \geq \epsilon, \quad \text{para todo o} \quad k. \tag{5.5}$$

Atendendo a que K é compacto, pois $K \in \mathcal{K}(X,Y)$ e $\{A_{n_k}x\}_{k=1}^{\infty}$ é limitada então pelo Teorema 5.3 existe uma subsucessão $\{KA_{n_{k_j}}x\}_{j=1}^{\infty}$ que tem limite z em Y.

A convergência fraca de $KA_{n_{k_j}}$ para KA implica que $z = KAx$, pois $KA_{n_{k_j}}x \longrightarrow KAx$ e $\lim KA_{n_{k_j}}x = z$. Portanto, para n suficientemente grande $\|KA_{n_{k_j}}x - KAx\| < \epsilon$, o que contraria (5.5).

Concluímos então que KA_n converge fortemente para KA.

■

Antes de prosseguirmos o nosso estudo vamos estabelecer algumas notações que ser-nos-ão úteis mais à frente.

Seja $l^p \quad (1 \leq p \leq \infty)$ os espaços introduzidos no capítulo dois (§2.2).

Denotemos por $\|\cdot\|_p$ a norma em l^p e em $\mathcal{B}(l^p)$.

Seja c_0 o subespaço fechado de l^∞ que é constituído pelas sucessões que convergem para zero, onde a norma em c_0 é a norma em l^∞, isto é, $\|\cdot\|_0 = \|\cdot\|_\infty$.

Para $n = 1, 2, ...$ vamos definir as projecções em l^p e em c_0, respectivamente, por:

$$P_n : \{x_0, x_1, x_2, ...\} \longmapsto \{x_0, x_1, ..., x_{n-1}, 0, 0, ...\} \tag{5.6}$$

$$Q_n : \{x_0, x_1, x_2, ...\} \longmapsto \{\underbrace{0, ..., 0}_{n}, x_n, x_{n+1}, ...\}. \tag{5.7}$$

Tendo por base o escrito anteriormente podemos apresentar a seguinte observação:

Observação 5.2 *1.* $P_n + Q_n = I$.

Ora,

$$\begin{aligned}
(P_n + Q_n)(\{x_0, x_1, x_2, ...\}) &= P_n(\{x_0, x_1, x_2, ...\}) + Q_n(\{x_0, x_1, x_2, ...\}) \\
&= \{x_0, x_1, ..., x_{n-1}, 0, 0, ...\} + \{\underbrace{0, ..., 0}_{n}, x_n, x_{n+1}, ...\} \\
&= \{x_0, x_1, x_2, ...\} \\
&= I(\{x_0, x_1, x_2, ...\}), \quad \textit{para todo o } x.
\end{aligned}$$

2. O operador P_n converge fortemente para I em l^p $(1 \leq p < \infty)$ e em c_0.

Iremos aqui provar que o operador P_n converge fortemente para I no caso de l^p. Ora, para cada $n \in \mathbb{N}$ e $x \in l^p$ temos,

$$\begin{aligned}
\|P_n x - I x\| &= \|\{x_0, x_1, ..., x_{n-1}, 0, 0, ...\} - \{x_0, x_1, ..., x_{n-1}, x_n, ...\}\| \\
&= \|\{\underbrace{0, 0, ..., 0}_{n}, x_n, x_{n+1}, ...\}\|.
\end{aligned}$$

Donde,

$$\lim_{n\to\infty} \|\{0, 0, ...0, x_n, x_{n+1}, ...\}\| = 0.$$

3. O operador P_n não converge fortemente para I em l^∞.

Para mostrar o pretendido o mais simples é encontrarmos um $x \in l^\infty$ tal que $\|P_n x - I x\|_\infty$ não converge para zero. Seja $x = \{1 + \frac{1}{n+1}\}_{n=1}^\infty \in l^\infty$, pois x é limitado por 1 e por 2 (inferiormente e superiormente, respectivamente). Temos,

$$\begin{aligned}
\|P_n x - I x\|_\infty &= \left\| \left\{ 0, 0, ..., 0, 1 + \frac{1}{n+1}, 1 + \frac{1}{(n+1)+1}, ... \right\} \right\|_\infty \\
&= \sup_{k \geq n} \left| 1 + \frac{1}{k+1} \right| \\
&= 1 + \frac{1}{n+1}.
\end{aligned}$$

Assim, $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right) = 1$. E portanto, $\|P_n x - I x\|_\infty$ converge para 1, logo P_n não converge fortemente para I em l^∞.

5.3 Sucessões estáveis

Ao longo desta secção vamos considerar que o espaço de Banach X é o espaço c_0 ou o espaço l^p com $1 \leq p \leq \infty$.

Vamos denotar por X_n (para $n = 1, 2, ..$) o espaço $\mathbb{C}^n$ com a norma em l^p para o caso em que $X = l^p$ ou com a norma em l^∞ para o caso em que $X = c_0$.

Atendendo a (5.6) identificamos X_n como a imagem de X pela projecção P_n.

Seja A uma matriz $n \times n$. Desta forma, podemos identificar A como um operador no espaço X_n (espaço coluna) e consequentemente a norma de A, $\|A\|$, está bem definida. Observemos que,

$$\|A\| = \|P_n\, A\, P_n\|\,,$$

onde $\|A\|$ representa a norma de A enquanto elemento de $\mathcal{B}(X_n)$ e $\|P_n\, A\, P_n\|$ representa a norma do operador $P_n\, A\, P_n \in \mathcal{B}(X)$.

Vamos definir a sucessão das matrizes A_n, $n \times n$, por $\{A_n\} := \{A_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Definição 5.3 *Seja* $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ *uma sucessão de matrizes quadradas,* $n \times n$. *Dizemos que* $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ *é* ***estável****, ou uniformemente invertível em* X *se*

$$\overline{lim}_{n\to\infty}\, \|A_n^{-1}\| < \infty. \qquad \textit{(leia-se limite superior)}$$

No caso da sucessão $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ *não ser invertível escrevemos* $\|A_n^{-1}\| := \infty$.

Equivalentemente, podemos dizer que a sucessão $\{A_n\}$ *é estável em* X *se e só se existe um* $n_0 \geq 1$ *e um* $M \in]0, \infty[$ *tal que* A_n *é invertível para todo o* $n \geq n_0$ *e* $\|A_n^{-1}\| \leq M$ *para todo o* $n \geq n_0$.

Lema 5.9 *Suponhamos que* $X = c_0$ *ou* $X = l^p$ *com* $1 < p < \infty$. *Seja* $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ *a sucessão de matrizes,* A_n, $n \times n$. *Consideremos que existe um operador* $A \in \mathcal{B}(X)$ *tal que* A_n *e* A_n^* *convergem fortemente para* A *e* A^*, *respectivamente.*

Se $\underline{lim}\,_{n\to\infty} \|A_n^{-1}\| < \infty$ *então* A *é invertível.*

Demonstração. Admitamos que $\underline{lim}\,_{n\to\infty} \|A_n^{-1}\| < \infty$. Assim, por definição, é possível extrair uma subsucessão convergente, isto é, existem $n_1 < n_2 < ...$ e $M \in]0, \infty[$ tal que

$$\|A_{n_k}^{-1}\| \leq M. \tag{5.8}$$

Para cada $x \in X$ temos

$$\begin{aligned}\|P_{n_k}\,x\| &= \|A_{n_k}^{-1}\,A_{n_k}\,P_{n_k}\,x\|\,, \quad \text{porque } A_{n_k} \text{ é invertível}\\ &\leq \|A_{n_k}^{-1}\|\;\|A_{n_k}\,P_{n_k}\,x\|\\ &\leq M\;\|A_{n_k}\,P_{n_k}\,x\| \quad \text{por (5.8).}\end{aligned}$$

Pela Observação 5.2 sabemos que o operador P_{n_k} converge fortemente para I em l^p e em c_0; e, por hipótese, A_{n_k} converge fortemente para A. Assim, vem imediatamente que

$$\|x\| \leq M\,\|A\,x\|.$$

Observemos que o operador A é injectivo. De facto, $A\,y = A\,z \Longrightarrow y = z$. Suponhamos então que $A\,y = A\,z$, logo $A\,y - A\,z = 0$, ou ainda, $A(y-z) = 0$. Como $\|x\| \leq M\,\|A\,x\|$, então para $x = y - z$ vem $\|y-z\| \leq M\|\underbrace{A(y-z)}_{=0}\|$, donde $\|y-z\| \leq 0$ e portanto $y - z = 0$, ou seja $y = z$.

Por outro lado, temos que o conjunto das imagens é fechado. De facto, dado $y \in \overline{Im\,A}$, pelo Teorema 5.1, existe uma sucessão $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ de $Im\,A$ tal que $y_n \to y$. Ora, se $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ é uma sucessão de elementos em $Im\,A$, então $y_n = A\,x_n$, para $x_n \in l^p$. Temos $y_n \to y$, ou seja, $A\,x_n \to y$. Como toda a sucessão convergente é de Cauchy [16], então vem:

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N}:\ \|A\,x_m - A\,x_n\| < \epsilon,\ \text{para todo o } m, n > N. \tag{5.9}$$

Atendendo a que $\|x\| \leq M\|A\,x\|$, podemos escrever,

$$\frac{1}{M}\|x_m - x_n\| \leq \|A\,x_m - A\,x_n\| < \epsilon,\ \text{por (5.9).} \tag{5.10}$$

Uma vez que estamos em espaços completos, então a sucessão $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge em l^p. Sendo x o limite de $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, (5.10) garante que $A\,x_n \to y = A\,x$ e portanto $y \in Im\,A$. Concluímos então que $\overline{Im\,A} \subseteq Im\,A$. Como $Im\,A \subseteq \overline{Im\,A}$, então podemos afirmar que o conjunto das imagens de A é fechado.

Como usualmente, vamos identificar o espaço dual $(l^p)'$ com o espaço l^q, com $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, e o espaço dual $(c_0)'$ com o espaço l^1. Temos, $\|(A_n^*)^{-1}\| = \|A_n^{-1}\|$, porque como podemos ver em [16] $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$ e $\|T^*\| = \|T\|$. Logo, para cada $x \in X'$,

$$\begin{aligned}\|P_{n_k}\,x\| &= \|(A_{n_k}^*)^{-1}\,A_{n_k}^*\,P_{n_k}\,x\|\\ &\leq \|(A_{n_k}^*)^{-1}\|\;\|(A_{n_k}^*)\,P_{n_k}\,x\|\\ &= \|A_{n_k}^{-1}\|\;\|(A_{n_k}^*)\,P_{n_k}\,x\|.\end{aligned}$$

Como P_{n_k} converge fortemente para I em l^p e em c_0, pela Observação 5.2, e $A^*_{n_k}$ converge fortemente para A^*, por (5.8), então

$$\|x\| \leq M\, \|A^*\, x\|\,, \text{ para todo o } x \in X'.$$

Daqui concluímos que A^* é injectivo, pois se $A^*y = A^*z$ então $y = z$. De facto, sendo $A^*y = A^*z$ então $A^*(y-z) = 0$. Atendendo a que $\|x\| \leq M\|A^*x\|$, então para $x = y - z$ vem $\|y-z\| \leq M\|\underbrace{A^*(y-z)}_{=0}\|$. Portanto, $\|y-z\| \leq 0$, isto é, $\|y-z\| = 0 \Longleftrightarrow y = z$.

Analogamente ao provado em cima para o operador A, temos também agora que $\overline{Im\, A^*} = Im\, A^*$. Destes últimos factos e do acima mostrado para o operador A, concluímos que o conjunto das imagens de A é denso para ambas as situações em consideração.

Provámos então que:

1. A é um operador injectivo, tem imagem fechada e o conjunto das imagens é denso;

2. A^* é um operador injectivo, ou seja A é um operador sobrejectivo.

Então podemos concluir que A é um operador bijectivo e portanto é invertível.

■

Proposição 5.10 *Suponhamos que X é o espaço c_0 ou o espaço l^p com $1 \leq p < \infty$.*

Seja $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ uma sucessão de matrizes, A_n, $n \times n$. Admitamos que A_n converge fortemente para A em X, para algum operador invertível $A \in \mathcal{B}(X)$. Nestas condições as afirmações seguintes são equivalentes:

1. *$\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ é estável;*

2. *A_n é invertível para todo o n suficientemente grande e A_n^{-1} converge fortemente para A^{-1} em X.*

Demonstração. Para mostrar que as afirmações 1 e 2 são equivalentes vamos mostrar que $1 \Longrightarrow 2$ e $2 \Longrightarrow 1$.

Comecemos então por mostrar que $2 \Longrightarrow 1$. Assim, pretendemos mostrar que se A_n é invertível para todo o n suficientemente grande e A_n^{-1} converge fortemente para A^{-1} em X, então a sucessão $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ é estável; ou seja, $\overline{lim}_{n\to\infty}\|A_n^{-1}\| < \infty$. Sabemos, por hipótese, que A_n^{-1} converge fortemente para A^{-1} em X. Assim, pela Observação 5.1,

$$sup_{n\geq 1}\|A_n^{-1}\| < \infty.$$

Pelo Lema 5.5 sabemos que toda a sucessão convergente é limitada, então $\overline{lim}_{n\to\infty}\|A_n^{-1}\|$ $< \infty$, e portanto $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ é estável.

Provemos agora que $1 \Longrightarrow 2$. Para cada $y \in X$ temos,

$$\begin{aligned}
\|A_n^{-1}\, P_n\, y - A^{-1}y\| &= \|A_n^{-1}\, P_n\, y - P_n A^{-1}y + P_n A^{-1}y - A^{-1}y\| \\
&\leq \|A_n^{-1}\, P_n\, y - P_n A^{-1}y\| + \|P_n A^{-1}y - A^{-1}y\|, \text{ por definição de norma.}
\end{aligned}$$

Atendendo à Observação 5.2 sabemos que P_n converge fortemente para I, portanto $\|P_n A^{-1}y - A^{-1}y\| \longrightarrow 0$.

Como, por hipótese, $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ é estável então A_n é invertível e existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo o $n \geq n_0$ temos, por definição, $\|A_n^{-1}\| \leq M$. Assim,

$$\begin{aligned}
\|A_n^{-1} P_n\, y - P_n\, A^{-1}y\| &= \|A_n^{-1} P_n\, y - A_n^{-1} A_n\, P_n\, A^{-1}\, y\|, \text{ porque } A_n \text{ é invertível} \\
&= \|A_n^{-1}(P_n\, y - A_n\, P_n\, A^{-1}\, y)\| \\
&\leq M\, \|P_n\, y - A_n\, P_n\, A^{-1}\, y\|, \text{ para } n \geq n_0, \text{ pois } \|A_n^{-1}\| \leq M \text{ (para } n \geq n_0).
\end{aligned}$$

Como P_n converge fortemente para I (pela Observação 5.2) e A_n converge fortemente para A, por hipótese, então $\|P_n y - A_n P_n A^{-1} y\| \to 0$. Logo $\|A_n^{-1} P_n y - P_n A^{-1} y\|$ converge para zero, e portanto $\|A_n^{-1} P_n\, y - A^{-1}\, y\|$ converge para zero, donde A_n^{-1} converge fortemente para A^{-1}. ■

Capítulo 6

Teorema de Baxter-Gohberg-Feldman

Ao longo deste capítulo teremos como objectivo mostrar que se $a \in W$ então a sucessão $\{T_n(a)\}_{n=1}^{\infty}$ é estável se e só se $T(a)$ é invertível.

6.1 Operadores de Toeplitz no espaço c_0

Dado que para se tratarem questões de estabilidade neste contexto por vezes é benéfico passar ao operador adjunto, é conveniente terem-se presentes as relações de dualidade entre os espaços em uso. Neste sentido, começamos por apresentar a definição seguinte:

Definição 6.1 *Se um espaço normado X contém uma sucessão $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que para cada $x \in X$ existe uma sucessão única de escalares $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ tais que*

$$\|x - (\alpha_1 e_1 + ... + \alpha_n e_n)\| \to 0,$$

*então dizemos que $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ é uma **base** de X; e x representa-se da seguinte forma:*

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \; e_k \, .$$

Exemplo 6.1 *O espaço dual de l^1 é o espaço l^∞.*

Ora, uma base para l^1 é $\{l_k\}_{k=1}^{\infty}$, onde $l_k = \{\delta_{k_j}\}_{j=1}^{\infty}$ que tem 1 nas k-ésimas posições e zeros em tudo o resto. Então cada $x \in l^1$ tem a seguinte representação única $x = \sum_{k=1}^{\infty} \epsilon_k \, l_k$.

Denotemos por $(l^1)'$ o espaço dual de l^1. Seja $f \in (l^1)'$, qualquer. Ora f é linear e limitado, portanto

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \epsilon_k \, \gamma_k \, , \;\; com \; \gamma_k = f(l_k). \tag{6.1}$$

Observemos que os números γ_k são unicamente determinados por f. Como $\{l_k\}_{k=1}^{\infty}$ é uma base, então $\|l_k\| = 1$ e

$$|\gamma_k| = |f(l_k)| \leq \|f\| \; \|l_k\| \; = \; \|f\|.$$

Temos, $|\gamma_k| \leq \|f\|$ e consequentemente,

$$sup_k |\gamma_k| \leq \|f\|. \tag{6.2}$$

Logo, $\{\gamma_k\}_{k=1}^{\infty} \in l^{\infty}$.

Por outro lado, para cada $b = \{\beta_k\}_{k=1}^{\infty} \in l^{\infty}$ podemos encontrar um funcional linear limitado $g \in (l^1)'$. Neste caso, g será definido por $g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \epsilon_k \, \beta_k$, onde $x = \{\epsilon_k\} \in l^1$. Como g é linear e limitado, pois $g \in (l^1)'$, então

$$\begin{aligned} |g(x)| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |\epsilon_k \; \beta_k| \;\; &\leq \;\; sup_j \; |\beta_j| \; \sum_{k=1}^{\infty} |\epsilon_k| \\ &= \;\; \|x\| \; sup_j \; |\beta_j|. \end{aligned}$$

Então $g \in (l^1)'$.

Mostremos finalmente que a norma de f é a norma em l^{∞}. Ora, de (6.1) temos,

$$\begin{aligned} |f(x)| = \left| \sum_{k=1}^{\infty} \epsilon_k \; \gamma_k \right| \;\; &\leq \;\; sup_k \; |\gamma_k| \; \sum_{k=1}^{\infty} |\epsilon_k| \\ &= \;\; \|x\| \; sup_k \, |\gamma_k|. \end{aligned}$$

Tomando o supremo de todos os x de norma 1 obtemos

$$sup_{x \in l^1 \, , \, \|x\|=1} \; \frac{|f(x)|}{\|x\|} \leq sup_k \, |\gamma_k|$$

ou ainda,

$$\|f\| \leq sup_k \, |\gamma_k|. \tag{6.3}$$

Assim, de (6.2) e de (6.3) concluímos que

$$\|f\| = sup_j \, |\gamma_j|$$

que é a norma em l^{∞}.

Ficou assim provado que o espaço dual de l^1 é o espaço l^∞. Contudo, este último espaço apresenta-nos algumas dificuldades, pois, por exemplo, como mostrámos na Observação 5.2 a projecção P_n não converge fortemente em l^∞.

Assim, tem particular interesse identificar o espaço l^1 com o espaço dual de c_0. Em termos de notação, nos espaços c_0 e $\mathcal{B}(c_0)$ a norma será denotada por $\|.\|_0$.

Exemplo 6.2 *A matriz de Toeplitz infinita, $T(a)$, induz um operador limitado em c_0 se e só se $a \in W$, e neste caso, $\|T(a)\|_0 = \|a\|_W$.*

Ora, comecemos por mostrar que se $a \in W$ então $T(a)$ induz um operador limitado em c_0.

Pela Proposição 2.5 sabemos que se $a \in W$ então $T(a)$ induz um operador limitado em l^p com $1 \leq p \leq \infty$, logo em particular induz um operador limitado em l^1. Uma vez que l^1 é o espaço dual de c_0, então $T(a)$ induz um operador limitado em c_0.

Vamos agora mostrar que, se $T(a)$ induz um operador limitado em c_0 então $a \in W$ e $\|T(a)\|_0 = \|a\|_W$. Ora, se $T(a)$ induz um operador limitado em c_0 e c_0 é o espaço dual de l^1, então $T(a)$ induz um operador limitado em l^1, então $\sup_{k\geq 1}\sum_{j=1}^{\infty}|a_{j-k}| < \infty$ e portanto $\sum_{j=1}^{\infty}|a_{j-k}| < \infty$, logo $a \in W$. Temos também, $\|T(a)\|_0 = \|T(a)\|_1 = \sup_{k\geq 1}\sum_{j=1}^{\infty}|a_{j-k}| = \sum_{j,k=-\infty}^{\infty}|a_{j-k}| = \|a\|_W$.

Atendendo ao facto de identificarmos o espaço c_0 como sendo o espaço dual de l^1, as Proposições 2.5, 2.6 e o Teorema 4.3 são também verdadeiros para $l^p = c_0$.

Definição 6.2 *Seja X um espaço linear. Dizemos que P e Q são **projecções complementares** em X se as três condições seguintes são satisfeitas:*

1. $P^2 = P$
2. $Q^2 = Q$
3. $P + Q = I$.

Lema 6.1 *Sejam X um espaço linear, P e Q projecções complementares em X e A um operador linear invertível em X. Então a compressão $PAP|\mathrm{Im}\,P$ de A sobre a imagem de P, $\mathrm{Im}\,P$, é invertível se e só se a compressão $QA^{-1}Q|\mathrm{Im}\,Q$ de A^{-1} sobre a imagem de Q, $\mathrm{Im}\,Q$, é invertível. Neste caso,*

$$(PAP)^{-1}P = P\,A^{-1}\,P - PA^{-1}\,Q\,(Q\,A^{-1}\,Q)^{-1}\,Q\,A^{-1}\,P\,.$$

Demonstração. Para mostrar que

$$(PAP)^{-1}P = P\,A^{-1}\,P - PA^{-1}\,Q\,(Q\,A^{-1}\,Q)^{-1}\,Q\,A^{-1}\,P$$

vamos mostrar equivalentemente que

$$PAP(PA^{-1}P - PA^{-1}Q(QA^{-1}Q)^{-1}Q\,A^{-1}P) = P.$$

Ora,

$$\begin{aligned}
PAP(PA^{-1}P - PA^{-1}Q(QA^{-1}Q)^{-1}Q\,A^{-1}P) &= PAP^2A^{-1}P - PAP^2A^{-1}Q \\
&\quad (QA^{-1}Q)^{-1}Q\,A^{-1}P \\
&= PAPA^{-1}P - PAPA^{-1}Q \\
&\quad (QA^{-1}Q)^{-1}QA^{-1}P \quad \text{pois } P^2 = P \\
&= PA(I-Q)A^{-1}P - PA \\
&\quad (I-Q)A^{-1}Q(QA^{-1}Q)^{-1}QA^{-1}P \text{ pois,} \\
&\quad P + Q = I \\
&= PAIA^{-1}P - PAQA^{-1}P - \\
&\quad PAIA^{-1}Q(QA^{-1}Q)^{-1}QA^{-1}P + \\
&\quad PAQA^{-1}Q(QA^{-1}Q)^{-1}QA^{-1}P \\
&= P - PAQA^{-1}P - PQ(QA^{-1}Q)^{-1}QA^{-1}P \\
&\quad +PAQA^{-1}P \\
&= P, \text{ pois } PQ = P(I-P) = P - P^2 = \\
&\qquad P - P = 0 \text{ e } -PAQA^{-1}P + \\
&\qquad PAQA^{-1}P = 0.
\end{aligned}$$

De forma análoga, temos:

$$\begin{aligned}
(PA^{-1}P - PA^{-1}Q(QA^{-1}Q)^{-1}QA^{-1}P)PAP &= PA^{-1}PPAP - PA^{-1}Q(QA^{-1}Q)^{-1} \\
&\quad QA^{-1}PPAP \\
&= PA^{-1}PAP - PA^{-1}Q(QA^{-1}Q)^{-1} \\
&\quad QA^{-1}PAP, \text{ pois } P \text{ é uma projecção}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= PA^{-1}(I-Q)AP - PA^{-1}Q(QA^{-1}Q)^{-1}QA^{-1}(I-Q)AP, \text{ pois } P+Q=I \\
&= PA^{-1}IAP - PA^{-1}QAP - PA^{-1}Q(QA^{-1}Q)^{-1}QA^{-1}IAP + PA^{-1}Q(QA^{-1}Q)^{-1}QA^{-1} \\
&\quad QAP \\
&= P - PA^{-1}QAP - PA^{-1}Q(QA^{-1}Q)^{-1}QP + PA^{-1}QAP \\
&= P, \text{ pois } QP=(I-P)P=P-P^2=P-P=0 \text{ e } -PA^{-1}QAP+PA^{-1}QAP=0.
\end{aligned}$$

■

Teorema 6.2 (Teorema de Baxter-Gohberg-Feldman) *: Seja X um dos espaços c_0 ou l^p, com $1<p<\infty$ e seja $a\in W$. Então,*

$$\overline{lim}_{n\to\infty}\|T_n^{-1}(a)\| < \infty \textit{ se } T(a) \textit{ é invertível},$$

$$lim_{n\to\infty}\|T_n^{-1}(a)\| = \infty \textit{ se } T(a) \textit{ não é invertível.}$$

Assim, a sucessão $\{T_n(a)\}_{n=1}^{\infty}$ é estável se e só se a não tem zeros em Γ_0 e $wind\, a=0$.

Demonstração. Comecemos por mostrar que $lim_{n\to\infty}\|T_n^{-1}(a)\|=\infty$ se $T(a)$ não é invertível. Pelo Lema 5.9 temos imediatamente que

$$\text{se } T(a) \text{ não é invertível então } \; lim_{n\to\infty}\|T_n^{-1}(a)\|=\infty.$$

Admitamos agora que $T(a)$ é invertível. Pretendemos mostrar que $\overline{lim}_{n\to\infty}\|T_n^{-1}(a)\|<\infty$. Pela Proposição 2.3 temos

$$T(aa^{-1}) = T(a)T(a^{-1}) + H(a)H(\tilde{a}^{-1})$$

ou seja,

$$T(a)T(a^{-1}) = I - H(a)H(\tilde{a}^{-1}).$$

Então, as identidades seguintes são equivalentes:

$$\begin{aligned}
T^{-1}(a)T(a)T(a^{-1}) &= T^{-1}(a)I - T^{-1}(a)H(a)H(\tilde{a}^{-1}), \text{ porque } T(a) \text{ é invertível} \\
IT(a^{-1}) &= T^{-1}(a) - T^{-1}(a)H(a)H(\tilde{a}^{-1}).
\end{aligned}$$

Donde, $T^{-1}(a)=T(a^{-1})+T^{-1}(a)H(a)H(\tilde{a}^{-1})$.

Observemos que $T^{-1}(a)$ é da forma $T(a^{-1})+K$ onde K é um operador compacto, pela Proposição 2.6 e pelo Lema 5.2.

O operador Q_n converge fortemente para zero. De facto, para $x \in l^p$ temos, $\|Q_n x\| = \|Q_n(\{x_0, x_1, ...\})\| = \|\{0, 0, ..., 0, x_n, x_{n+1}, ...\}\|$. Assim,

$$\lim_{n\to\infty} \|Q_n x\| = \lim_{n\to\infty} \|\{0, 0, ..., 0, x_n, x_{n+1}, ...\}\| = 0.$$

Assim, pela Proposição 5.7, temos $Q_n K$ converge uniformemente para zero, donde:

$$\begin{array}{rcl} \|Q_n K Q_n | Im\, Q_n\| & = & \|Q_n K Q_n\| \\ & \leq & \|Q_n K\|\, \|Q_n\| \\ & \leq & \|Q_n K\|\,, \text{ pois } \|Q_n\| \leq 1 \\ & \overrightarrow{n \to \infty} & 0 \end{array}$$

e consequentemente,

$$Q_n T^{-1}(a) Q_n | Im\, Q_n = Q_n T(a^{-1}) Q_n | Im\, Q_n + \underbrace{Q_n K Q_n}_{K_n},\ \text{com } \|K_n\| \to 0.$$

Observemos que o operador $Q_n T(a^{-1}) Q_n | Im\, Q_n$ está naturalmente relacionado com o operador $T(a^{-1})$. Por outro lado, sabemos pelo Teorema 4.1 que o operador $T(a^{-1})$ é invertível assim como $T(a)$. Então $Q_n T^{-1}(a) Q_n | Im\, Q_n$ é também invertível. Neste âmbito, para n suficientemente grande, temos que

$$\forall \epsilon > 0\ \exists N = N(\epsilon),\ n \geq N(\epsilon) : \|(Q_n T^{-1}(a) Q_n)^{-1} Q_n\| < (1+\epsilon)\, \|T^{-1}(a^{-1})\|.$$

Como o operador $T_n(a)$ pode ser identificado com o operador $P_n T(a) P_n | Im\, P_n$, então pelo Lema 6.1 temos que $P_n T(a) P_n | Im\, P_n$ é invertível e $(P_n T(a) P_n)^{-1} P_n = P_n T^{-1}(a) P_n - P_n T^{-1}(a) Q_n (Q_n T^{-1}(a) Q_n)^{-1} Q_n T^{-1}(a) P_n$. Em especial, isto leva a

$$\|T_n^{-1}(a)\| \leq \|T^{-1}(a)\| + (1+\epsilon) \|T^{-1}(a)\|\, \|T^{-1}(a^{-1})\|\, \|T^{-1}(a)\|$$

e portanto $\overline{\lim} \|T_n^{-1}(a)\| < \infty$.

■

Observação 6.1 *Saliente-se que o Teorema de Baxter-Gohberg-Feldman também é válido para os espaços l^1 e l^∞, fazendo-se as devidas adaptações.*

Corolário 6.1 *Seja X o espaço c_0 ou o espaço l^p com $1 < p < \infty$ e $a \in W$.*

Se $T(a)$ é invertível então o operador $T_n^{-1}(a) P_n$ converge fortemente para o operador $T^{-1}(a)$ em X.

Demonstração. Seja $T(a)$ invertível, então pelo Teorema 6.2 $\overline{\lim}_{n\to\infty}\|T_n^{-1}(a)\| < \infty$, ou seja, a sucessão $\{T_n(a)\}_{n=1}^{\infty}$ é estável. Logo, pela Proposição 5.10 vem que $T_n(a)$ é invertível, para todo o n suficientemente grande e que $T_n^{-1}(a)$ converge fortemente para $T^{-1}(a)$ em X. Pela observação 5.2 sabemos que P_n converge fortemente para I em l^p (com $1 < p < \infty$), assim $T_n^{-1}(a)P_n$ converge fortemente para $T^{-1}(a)I = T^{-1}(a)$ em X.

■

Observação 6.2 *Seja $A = [a_{jk}]_{j,k=0}^{\infty}$ uma matriz infinita. Suponhamos que A gera um operador limitado em l^2 (como por exemplo um operador de Toeplitz $T(a)$). Para resolver o sistema $A\,x = y$, isto é, o sistema linear infinito,*

$$\begin{bmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} & \dots \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} & \dots \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \vdots \end{bmatrix} \tag{6.4}$$

vamos resolver o "sistema finito",

$$\begin{bmatrix} a_{00} & a_{01} & \dots & a_{0n} & 0 & \dots \\ a_{10} & a_{11} & \dots & a_{1n} & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ a_{n0} & a_{n1} & \dots & a_{nn} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{0^{(n)}} \\ x_{1^{(n)}} \\ \vdots \\ x_{n^{(n)}} \\ 0 \\ \vdots \end{bmatrix} = P_n \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \\ 0 \\ \vdots \end{bmatrix}, \tag{6.5}$$

onde $x^{(n)} = \{x_{0^{(n)}}, x_{1^{(n)}}, ..., x_{n^{(n)}}, ...\} \in Im\,P_n$.

Posteriormente a estabilidade garantida no Corolário 6.1 leva a se encontrar a solução de (6.4) a partir da solução de (6.5) que é equivalente a um sistema finito.

*A este método chamamos **método da secção finita**.*

Note-se que a passagem da matriz infinita para a matriz finita realiza-se pelo uso do projector P_n.

Atendendo à definição (5.6), o sistema (6.5) assume a forma,

$$P_nAx^{(n)} = P_ny, \text{ com } x^{(n)} \in Im\,P_n.$$

Se $P_nx^{(n)} = x^{(n)}$, para $x^{(n)} \in Im\,P_n$ então podemos ainda escrever $P_nA\,P_nx^{(n)} = P_ny$, com $x^{(n)} \in Im\,P_n$. Se designarmos a matriz

$$\begin{bmatrix} a_{00} & a_{01} & \dots & a_{0n} \\ a_{10} & a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n0} & a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \tag{6.6}$$

por A_n, então podemos perspectivar a identificação seguinte (onde são desprezadas as entradas com valores nulos):

$$A_n = P_n A P_n | Im\, P_n.$$

No caso particular da matriz A ser a matriz de Toeplitz ($A = T(a)$), com $a \in W$, o Corolário anterior diz-nos que se $T(a)$ é invertível podemos solucionar o sistema infinito $T(a)x = y$ por consideração do "sistema finito"

$$T_n(a)x^{(n)} = P_n y, \text{ onde } x^{(n)} \in Im\, P_n \text{ e } T_n(a) = \begin{bmatrix} a_0 & a_{-1} & \dots & a_{-(n-1)} \\ a_1 & a_0 & \dots & a_{-(n-2)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & a_0 \end{bmatrix}.$$

Capítulo 7

Conclusão

O crescente interesse no estudo dos operadores e das matrizes de Toeplitz justifica-se pela diversidade de problemas a que eles estão associados, às interessantes e complexas questões que levantam e aos bonitos resultados que originam.

Os operadores de Toeplitz não podem ser abordados sem fazer referência aos seus "companheiros" - operadores de Hankel, pois estes deram um grande contributo a esta classe de operadores. A sua inseparável relação ficou bem presente na parte inicial deste trabalho .

Esta classe de operadores surge muitas vezes relacionada com outros tópicos da Matemática, como por exemplo com a Teoria de Funções, a Teoria de Operadores e a Teoria das Álgebras de Banach. Algumas destas relações ficaram bem evidenciadas ao longo deste trabalho, nomeadamente a relação entre as propriedades dos operadores de Toeplitz e as propriedades geométricas dos seus símbolos (mostrámos com o Teorema 4.3 que o operador de Toeplitz é de Fredholm se e só se o símbolo do operador é uma função não nula e que o seu índice está relacionado com o índice topológico), assim como a simbiose entre a teoria de operadores e a teoria de sistemas lineares (Capítulo 6).

As factorizações referidas no Capítulo 3, refira-se a este respeito a Factorização de Wiener-Hopf, permitiram apresentar o inverso do operador de Toeplitz e mostrar a sua importância no desenvolvimento da teoria de Fredholm.

A teoria de Fredholm surgiu como um meio que veio dar resposta a uma das questões mais pertinentes deste trabalho: em que condições o operador de Toeplitz é invertível (para as classes de símbolos em estudo). A resposta a esta questão é dada pelo Corolário 4.2. No entanto, este Corolário juntamente com o Teorema 4.3 permitem afirmar que: $T(a)$ é invertível em l^p, com $1 \leq p \leq \infty$, se e só se $T(a)$ é de Fredholm de índice zero, que não é mais do que uma particularização do Teorema de I. Gohberg (Teorema 4.4) para o caso do símbolo estar na álgebra de Wiener.

Neste âmbito, o Teorema da Factorização de Wiener-Hopf pode ser reformulado para: se o operador de Toeplitz é de Fredholm então o seu símbolo admite uma factorização da forma $a(t) = a_-(t)\, t^m\, a_+(t)$, com $t \in \Gamma_0$, com adicionais propriedades nos factores $a_\pm$ e que neste caso é designada por factorização de Wiener-Hopf.

O último capítulo surge como um caso particular do Capítulo 5 e em estreita relação com o Capítulo 4, mais precisamente com o Corolário 4.2. Neste sentido, o Corolário 4.2 e o Teorema 6.2 permitem afirmar que $\{T_n(a)\}_{n=1}^{\infty}$ é estável se e só se $T(a)$ é invertível em l^p. Assim, este último capítulo, dedicado ao método que aproxima a solução de um sistema de equações lineares - método da secção finita, permitiu responder a algumas das interrogações que conduziram a este trabalho e evidenciar condições suficientes para que tal método da secção finita possa ser aplicado.

Bibliografia

[1] E. L. Basor e T. Ehrhardt, Factorization theory for a class of Toeplitz + Hankel operators, *J. Oper. Theory* **51** (2004), 411-433.

[2] E. L. Basor e T. Ehrhardt, On a class of Toeplitz + Hankel operators, *New York J. Math.* **5** (1999), 1-16.

[3] A. Böttcher, Toeplitz operators with piecewise continuous symbols - a neverending story?, *Math. Verein* **97** (1995), 115-129.

[4] A. Böttcher, C^*-algebras in numerical analysis, *Ir. Math. Soc. Bull.* **45** (2000), 57-133.

[5] A. Böttcher e B. Silbermann, *Introduction to Large Truncated Toeplitz Matrices*, Springer, New York, 1999.

[6] A. Böttcher e B. Silbermann, *Analysis of Toeplitz Operators*, Springer, Berlin, 2006.

[7] A. Böttcher e I. Gohberg (eds.), *Singular Integral Operators and Related Topics*, Birkhäuser, Basel, 1996.

[8] A. Böttcher e S. M. Grudsky, *Toeplitz Matrices, Asymptotic Linear Algebra, and Functional Analysis*, Birkhäuser, Basel, 2000.

[9] A. Böttcher e S. M. Grudsky, *Spectral Properties of Banded Toeplitz Matrices*, Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, 2005.

[10] K. Clancey e I. Gohberg, *Factorization of Matrix Functions and Singular Integral Operators*, Birkhäuser Verlag, Basel, 1981.

[11] I. Gohberg, N. Manojlovic e A. F. dos Santos (eds.), *Factorization and Integrable Systems*, Birkhäuser, Basel, 2003.

[12] I. Gohberg e S. Goldberg, *Basic Operator Theory*, Birkhäuser, Basel, 1981.

[13] I. Gohberg, S. Goldberg e M. A. Kaashoek, *Classes of Linear Operators, Vol.II*, Birkhäuser Verlag, Basel, 1993.

[14] R. Hagen, S. Roch e B. Silbermann, *Spectral Theory of Approximation Methods for Convolution Equations*, Birkhäuser, Basel, 1994.

[15] M. G. Krein, Integral equations on a half-line with kernel depending upon the difference of the arguments, *Transl., Ser. 2, Am. Math. Soc.* **22** (1962), 163-288.

[16] E. Kreyszig, *Introductory Functional Analysis with Applications*, John Wiley & Sons, New York, 1978.

[17] J. W. Layman, The Hankel transform and some of its properties, *J. Integer Seq. 4* **1** (2001), 1-11.

[18] A. P. Nolasco e L. P. Castro, Factorization theory for Wiener-Hopf plus Hankel operators with almost periodic symbols, *Contemporary Mathematics* **414** (2006), 111-128.

[19] V. V. Peller, An excursion into the theory of Hankel operators, *Cambridge University Press. Math. Sci. Res. Inst.* **33** (1998), 65-120.

[20] V. V. Peller, *Hankel Operators and Their Applications*, Springer, New York, 2003.